

To My Father...

Babamın Anısına...

REEL ANALİZ

Babamın Anısına...

ve Aileme...

Erhan GÜLER

1995-1996

- I. BÖLÜM -

1.1. Euclidean Uzayları

TANIM: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer f aşağıdaki şartları sağlarsa (f, X) ikilisine iç çarpım uzayı diyeceğiz.

i - $\forall x, y \in X$ için, $(y \perp x) = (x \perp y)$ ise (değişme)

ii - $\forall x, y, z \in X$ için, $(x+y) \perp z = (x \perp y) + (y \perp z)$ $\perp$ işleminin $+$ üzerine sağ ve sol taraflı dağılma öz.

$$x \perp (y+z) = (x \perp y) + (x \perp z)$$

iii - $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

$$(\lambda x \perp y) = \lambda(x \perp y)$$

$$(x \perp \lambda y) = \lambda(x \perp y)$$

iv - $\forall x \in X$ için $(x \perp x) \geq 0$ (pozitif tanımlılık)

$$x \perp x = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \text{ dir.}$$

Bazen bu iç çarpım uzayına Prehilber Uzayı denir.

Eğer X , sonlu boyutlu ise bu iç çarpım uzayına Euclidean uzayı denir. Genellikle n -boyutlu Euclidean uzayı E^n ile gösterilir.

Örnek // $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow f(x, y) = (x \perp y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

biçiminde tanımlanan f , $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır.

i - $(x \perp y) = (y \perp x)$

$$x \perp y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, (y \perp x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i \text{ olup,}$$

$$x \perp y = y \perp x \text{ dir. //$$

ii - $(x+y) \perp z = (x \perp z) + (y \perp z)$

$$(x+y) \perp z = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = (x \perp z) + (y \perp z) //$$

iii- $\forall x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$ için ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda x \perp y = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda (x \perp y)$$

iv- $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için;

$$(x \perp x) = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

0 halinde, $(f, \mathbb{R}^n)$ ikilisi bir iç çarpım uzayıdır.

n-sonlu olduğu için bir Euclidean uzayıdır.

1.2. Tam Diferansiyel

x, y -düzleminin bir D bölgesinde tanımlı $z = f(x, y)$

fonksiyonunun kısmi türevleri $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ olsun. Bu türevleri verirken sırasıyla x 'e Δx ve y 'ye de Δy artma miktarlarını birbirinden bağımsız olarak veriyoruz. Yani değişkenlerden birine göre türev alırken, diğerini sabit kabul ediyoruz.

Şimdi ise x ve y 'ye sırasıyla Δx ve Δy artma miktarlarını beraber verelim.

$(x, y) \in D$ noktası sabit bir nokta olsun.

$(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$ noktası da başka bir sabit nokta olsun.

(x, y) noktasından $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ noktasına gidildiğinde $z = f(x, y)$ değişimi Δz olsun.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \text{ olur. (değişme miktarı)}$$

böylece x ve y sabit kabul edildiğinde $\Delta z, \Delta x$ ve Δy artmalarının fonksiyonu olur.

$\Delta x = 0, \Delta y = 0$ olursa $\Delta z = 0$ olur.

TANIM: İki değişkenli $z = f(x, y)$ fonksiyonu için, A ve B büyüklükleri birbirinden ve Δx ile Δy artımlarından bağımsız, ϵ_1 ve ϵ_2 de Δx ve Δy nin fonksiyonları olup,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \epsilon_1 = 0 \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \epsilon_2 = 0$$

olmak üzere, Δz artma miktarı için,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \text{ dir. } \dots (1.2.3)$$

Böyle bir bağıntı varsa f' 'ye, $(x,y) \in D$ noktasında $\tan$ diferansiyellenebilir denir. Bu takdirde,

$A\Delta x + B\Delta y$ toplamına da $z = f(x,y)$ fonksiyonunun $\tan$ diferansiyeli denir. Ve

$$dz = df(x,y) = A\Delta x + B\Delta y \dots (1.2.4)$$

ile gösterilir.

Örnek // $f(x,y) = x^2 + xy + xy^2$ fonksiyonunun $\tan$ diferansiyellenebilir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm // $z = f(x,y) = x^2 + xy + xy^2$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) + (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - (x^2 + xy + xy^2)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y + (x+\Delta x)(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - x^2 - xy - xy^2$$

$$\Delta z = \underbrace{(2x+y+y^2)}_A \Delta x + \underbrace{(x+2xy)}_B \Delta y + \underbrace{[\Delta x + (1+2y)\Delta y]}_{\varepsilon_1} \Delta x + \underbrace{(x\Delta y + \Delta x\Delta y)}_{\varepsilon_2} \Delta y$$

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$$A = 2x + y + y^2$$

$$B = x + 2xy$$

$$\varepsilon_1 = \Delta x + (1+2y)\Delta y$$

$$\varepsilon_2 = x\Delta y + \Delta x\Delta y \text{ olur. Burada } A \text{ ve } B, \Delta x \text{ ve } \Delta y \text{ ye}$$

bağlı değildir. ε_1 ve ε_2 , Δx ile Δy nin fonksiyonlarıdır.

$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ iken $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ve $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ olur.

O halde $z = f(x,y)$ fonksiyonu $(x,y) \in D$ noktasında diferansiyellenebilir. Ve $\forall (x,y) \in D$ için $dz = A\Delta x + B\Delta y$ ifadesi $\tan$ diferansiyeldir.

$$dz = (2x+y+y^2)dx + (x+2xy)dy = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1+2y = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ (tan dif. bilindir.)}$$

Teorem: Eğer $z=f(x,y)$ fonksiyonu bir $(x,y) \in D$ noktasında

$dz = df(x,y) = A\Delta x + B\Delta y$ anlamında tan diferansiyele sahip ise

$(x,y) \in D$ noktasında $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ ve $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ dir.

İspat // Daha önce gördüğümüz ,

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

ifadesinde $\Delta y = 0$ alarak $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ ifadesini oluşturalım.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + B\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \epsilon_1\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \epsilon_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $\Delta x = 0$ alarak $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$ ifadesini oluşturalım.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{B\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} B + \epsilon_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B \text{ olur.}$$

$z=f(x,y)$ fonksiyonunun tan diferansiyelinin varlığı için, kısmî türevlerinin varlığı gerekir. Fakat yeterli değildir. Bu nedenle kısmî türevler hem var olacak, hem de sürekli olacak. Şimdi bununla ilgili bir teorem verelim.

Teorem: $z=f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde 1. mertebeden kısmî türevleri var ve bu kısmî türevler, D bölgesinde sürekli iseler : $z=f(x,y)$ fonksiyonu $\forall (x,y) \in D$ noktasında diferansiyellenebilir. Ve

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \text{ dir.}$$

İspat // $(x,y) \in D$ sabit bir nokta olsun. Eğer sadece x değişirse

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \text{ olur. Burada } y \text{ sabit olup,}$$

z sadece x 'in bir fonksiyonudur. $f_x(x,y)$ kısmi türevi sürekli olduğundan yukarıdaki farka, bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$x < x_1 < x + \Delta x \text{ için,}$$

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x f_x(x_1, y) \text{ yazılabilir.}$$

$f_x(x,y)$ sürekli olduğundan $\Delta x \rightarrow 0$ için $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ve $x_1 \rightarrow x$

olur. Ve $\varepsilon_1 = f_x(x_1, y) - f_x(x, y)$ buradan,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x, y) \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \dots (1.2.5)$$

yazılır. Şimdi $z = f(x,y)$ fonksiyonunda x ve y birlikte değişsin. Bu durumda,

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y)] - f(x, y) \text{ olup}$$

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] \dots$$

$$\dots (1.2.6)$$

biçiminde yazıp, ikinci paranteze ortalama teoremini uygulayalım.

$$y < y_1 < y + \Delta y \text{ için,}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = \Delta y f_y(x+\Delta x, y_1) \dots (1.2.7)$$

olur. f_y sürekli olduğundan $\Delta x \rightarrow 0$ için $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ve $y_1 \rightarrow y$

olur. Ve $\varepsilon_2 = f_y(x+\Delta x, y_1) - f_y(x, y)$ alınarak

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_2 \Delta y \dots (1.2.8)$$

elde edilir.

(1.2.5), (1.2.8) ve (1.2.6)'dan,

$$\Delta z = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \dots (1.2.9)$$

bulunur. Burada $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1 = 0$, $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2 = 0$

dir.

Böylece $z=f(x,y)$ fonksiyonu için,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

burada, yakın bir yaklaşımla $dx = \Delta x$ ve $dy = \Delta y$ dir.

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy} \text{ olur. } (dz = f_x dx + f_y dy)$$

($z=f(x,y)$ fonksiyonunun bir $(x,y) \in D$ noktasında tan diferansiyellenebilir olma durumudur.)

Genelleştirme: n -değişkenli, kısmî türevleri var ve sürekli ise

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

fonksiyonunun tan diferansiyeli

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad \text{veya}$$

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

olur.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ ifadesinin tekrar diferansiyelini alalım.

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^2$$

notasyonel olarak gösterilir ve tümevarımla

$$d^n z = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^n$$

olur ve n vasıtasıyla binom katsayıları bulunur.

Örnek // $u = ax + by + cz$

$v = a_1x + b_1y + c_1z$ olmak üzere $t = f(u, v)$ veriliyor.

d^2t yi bulunuz.

Çözüm // $dt = f_u du + f_v dv$

$$du = a dx + b dy + c dz$$

$$dv = a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz$$

$$\Rightarrow dt = f_u (a dx + b dy + c dz) + f_v (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)$$

$$d^2t = f_{uu} (a dx + b dy + c dz)^2 + 2f_{uv} (a dx + b dy + c dz)(a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz) + f_{vv} (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)^2$$

Alıstırmalar

1- $f(u, v, x, y) = 2u^{1/2} v^4 x^{1/2} y^{2/3}$ için

a) $f_u(1, -2, 4, 8) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u^{-1/2} v^4 x^{1/2} y^{2/3}$$

$$f_u(1, -2, 4, 8) = 1^{-1/2} \cdot (-2)^4 \cdot (4)^{1/2} \cdot (8)^{2/3} = 128$$

b) $f_v(1, -2, 4, 8) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 8u^{1/2} v^3 x^{1/2} y^{2/3}$$

$$f_v(1, -2, 4, 8) = 8 \cdot 1^{1/2} \cdot (-2)^3 \cdot (4)^{1/2} \cdot (8)^{2/3} = -2^9 //$$

c) $f_x(1, -2, 4, 8) = ?$

d) $f_y(1, -2, 4, 8) = ?$

2- $f(x, y, z) = (x+y)^z$ için ,

$f_x = ?$ $f_y = ?$ $f_z = ?$ ve $(x+y)(f_x + f_y) = ?$

Çözüm // $\frac{\partial f}{\partial x} = z(x+y)^{z-1} = f_x$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z(x+y)^{z-1} = f_y$$

$$\ln f(x, y, z) = z \ln(x+y)$$

$$\frac{f_z}{f(x, y, z)} = 1 \cdot \ln(x+y)$$

$$fz = f(x,y,z) \ln(x+y) = (x+y)^z \ln(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x+y)^z \ln(x+y) //$$

$$(x+y)(f_x + f_y) = (x+y) [z(x+y)^{z-1} + z(x+y)^{z-1}]$$

$$= (x+y) [2z(x+y)^{z-1}]$$

$$= 2z(x+y)^z$$

9/28-

3- $f(x,y)$, $\mathbb{R}^2$ de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve

$$x=2r-s \text{ ve } y=r+2s \text{ ise}$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 25 \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

olduğunu gösteriniz.

Gözüm // $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow = 8 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 6 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 8 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= 25 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

13.3.96 / Çarpanba

4- $c = \text{sabit}, z = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$z = f(y+cx) + g(y-cx)$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ old. gösterin.

5- $f(x, y, z, u) = z \cdot u \cdot \arctan \frac{x}{y} + 5u$ ise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = ?$$

6- $x = u \cos v$ ise $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$
 $y = u \sin v$

olduğunu gösterin.

7- $w = \ln(e^r + e^s + e^t + e^u) \Rightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial r \partial s \partial t \partial u} = ?$

8- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$w(x, y, z) = f(x-y, y-z, z-x)$ ise $w_x + w_y + w_z = ?$

9- $u = f(x, y)$ $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ise

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

olduğunu gösterin.

JACOBIEN MATRİSİ

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -değişkenli bir fonksiyonun tan diferan-

siyeli; $dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ idi.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

artma miktarı dy 'ye çok yakındır. Bu artma miktarları,

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0 \text{ iken } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \dots, \varepsilon_n \rightarrow 0$$

olmak koşulu ile,

$$\Delta y = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n + \varepsilon_1 dx_1 + \dots + \varepsilon_n dx_n$$

olacağı ve $(\Delta x_i = dx_i)$ yazılabilir.

Şimdi n tane değişkenli, n tane fonksiyon alalım.

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots (1.4.1)$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

alalım. Bu fonksiyonlar $D \in E^n$ bölgesinde, kısmi türevlere sahip, sürekli fonksiyonlar olsun. Bunların tam diferansiyelleri -2

$$dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \quad \dots (1.4.2) \quad -2$$

$$dy_n = \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n$$

denklemler sistemidir.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \quad \dots (1.4.3) \quad -8$$

bişiminde yazılır. Bunun sonucu olarak,

$[dy_1, dy_2, \dots, dy_n]$ vektörü, $[dx_1, dx_2, \dots, dx_n]$ vektörü vasıtasıyla bulunur.

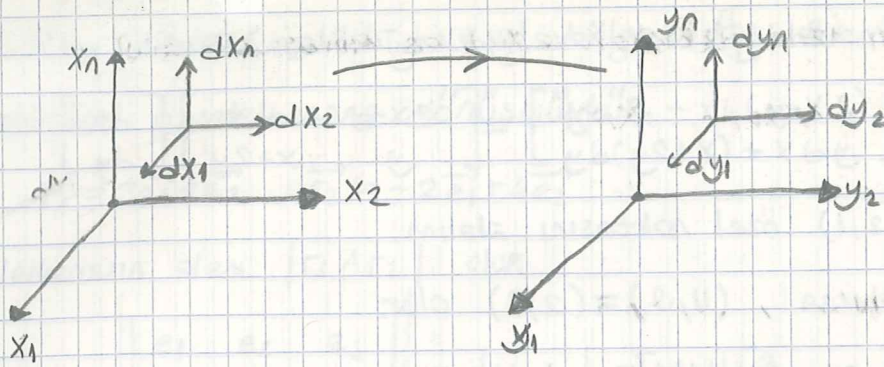
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine Jacobian Matrisi denir.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset E^n$ noktasına bir ve yalnız bir

$(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^m$ karşı gelir. Dolayısıyla E^n den E^m ye bir

doğrusal olmayan dönüşüm sağlanabilir.



$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$Y = f(X)$ biçiminde, (1.4.1) 'i basitleştirebiliriz.

$$dY = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} \quad f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{bmatrix} \quad dX = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

$dY = f_x dX$ biçiminde, (1.4.3) ü gösterebiliriz.

Burada $Y = f(X)$ doğrusal dönüşüm değildir. Bununla beraber, Jacobien matrisi doğrusal bir dönüşümdür.

Eğer $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ yerine $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ yazılırsa, $dY = Y_x dX$ elde edilir.

Örnek // $y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$y_2 = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$$

$$y_3 = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{veriliyor.}$$

$$\begin{aligned} dY = \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 \\ 2x_1 dx_1 - 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 \\ -2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \\ -2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eğer noktanız $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$ ise $(y_1, y_2, y_3) = (4, 4, -2)$ olur.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad dY = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} dX$$

$y = f(x)$

dönüşümü, doğrusal bir dönüşümdür.

Örnek // $U = x^2 - xy$, $V = xy + y^2$ olsun.

Burada bağımsız değişken x ve y , bağımlılar u ve v dir.

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x-y)dx - xdy \\ ydx + (x+2y)dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y & -x \\ y & x+2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$(x,y) = (2,1)$ özel noktasını alalım.

$(x,y) = (2,1)$ olursa, $(u,v) = (2,1)$ olur.

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

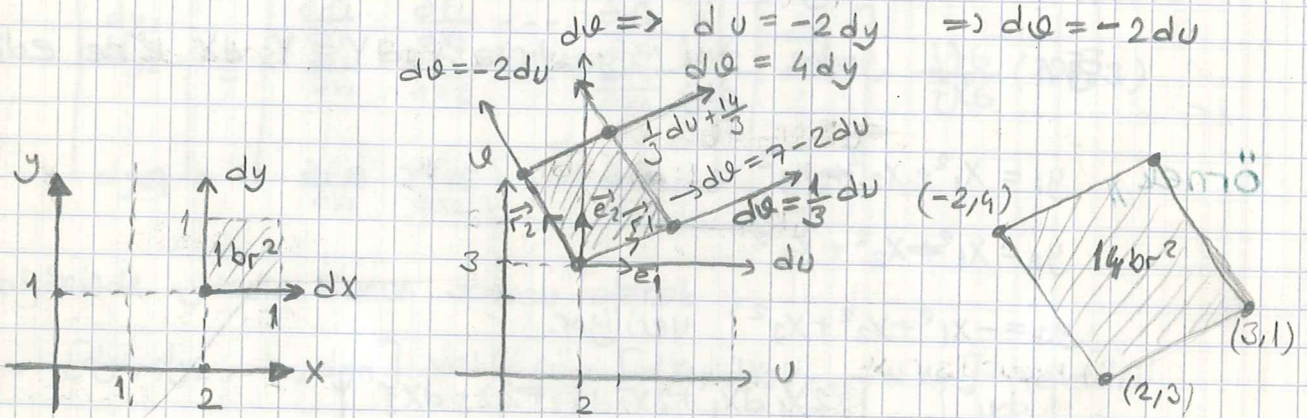
Şimdi bu doğrusal dönüşümü biraz açalım.

$dy=0$ için, $\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3dx \\ dx \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow du = 3dx \\ dv = dx$$

$$\Rightarrow du = 3dv \vee dv = \frac{1}{3} du$$

$dx=0$ için, $\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2dy \\ 4dy \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3dx-2dy \\ dx+4dy \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
($dy=1$ için)

$$du = 3dx - 2$$

$$dv = dx + 4$$

$$dv = \frac{du+2}{3} + 4$$

($dx=1$ için)

$$\Rightarrow dv = \frac{1}{3} du + \frac{14}{3} //$$

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2dy \\ 1+4dy \end{bmatrix}$$

$$du = 3-2dy \Rightarrow dv = 1+4dy //$$

şekilde görüldüğü gibi (dx, dy) koordinat sistemindeki $0 \leq dx \leq dy$ ve $0 \leq dy \leq 1$ karesel bölge, (du, dv) koordinat sistemindeki paralelkenara dönüşmüştür.

$$\vec{r}_1 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad \vec{r}_2 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

Paralelkenarın alanı $|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|$ olur.

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 14\vec{e}_3 = 14 \text{ br}^2$$

norm

Böylece (dy, dx) koordinat sisteminde seçilen her bölge, alan bakımından (du, dv) koordinat sisteminde 14 katına dönüşür.

Burada (x, y) koordinat sisteminin (u, v) koordinat sistemine olan dönüşümler doğrusal değildir.

$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow u=1-y \\ &v=y+y^2 \quad v=(1-u)+(1-u)^2 \\ &\Rightarrow v=2-3u+u^2 \text{ parabolüdür.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=1 &\Rightarrow u=x^2-x \\ &v=x+1 \quad u=(v-1)^2-(v-1) \\ &\Rightarrow u=v^2-3v+2 \text{ parabolüdür.} \end{aligned}$$

Örnek //

$$\begin{aligned} x &= \cos u \cos v \\ y &= \cos u \sin v \\ z &= \sin u \end{aligned}$$

15.3.96 / Cuma

dönüşümünün jacobian matrisini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v)}$$

Örnek // $W=F(x, y, z)$ fonksiyonunun jacobian matrisi,

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right] \text{ dir.}$$

Bu satır vektörüne F 'nin Gradyent vektörü denir.

ve gradf ya da ∇F (Nabla F) sembolleriyile gösterilir.

Benzer şekilde, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için,

$$[F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, \dots, F_{x_n}] = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$= \nabla F$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$F(x) = 2x^2 \vec{i} + 2y^2 \vec{j} + 3z^3 \vec{k}$$

$$\nabla F = 2 + 4y + 9z^2 \text{ olur.}$$

Şimdi tekrar $Y=f(X)$ dönüşümüne dânelim ve $m=n$ olsun.

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{--- (1.4.7)}$$

⋮

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

denklemler sisteminde $Y_x = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ jacobien matrisi kareseldir.

$$y = \det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad \text{--- (1.4.8)}$$

bu determinanta, (1.4.7) denklemler sisteminin fonksiyonel determinanti derir. $Y=f(X)$ fonksiyonlarına karşılık gelem

$dY = Y_x dX$ doğrusal dönüşümü için, j ; Y_x matrisinin determinantıdır. Bu determinanın mutlak değeri, n -boyutlu uzaylardaki doğrusal dönüşümün hacimleri oranını verir.

Bunu, sembolik olarak ;

$$\Delta V_y = |\det Y_x| \Delta V_x \quad \text{--- (1.4.9)}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Bundan önceki örnekte, $n=2$ boyutlu için,

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \text{ idi.}$$

Burada $j = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $|\det j| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \text{ br}^2$ olur.

Örnekte görüldüğü gibi j fonksiyonel determinanti, (dy, dx) koordinat sistemindeki karenin alanı, (du, dv) koordinat sistemindeki paralelkenarın alanının oranını verir.

Örnekte, $|j| = \frac{\text{Paralelkenarın alanı}}{\text{karenin alanı}} = \frac{14}{1} = 14$

Eğer $n=1$ ise, j fonksiyonel determinanti, $\frac{dy}{dx}$ olduğundan bunun mutlak değeri, Δy ve Δx uzunlukları oranıdır. madem ki,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ den, } \left| \frac{dy}{dx} \right| \sim \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \text{ olur.}$$

Alıştırımlar

1- Aşağıdaki dönüşümlerin jacobian matrislerini bulunuz.

a) $y_1 = 2x_1 - 3x_2$
 $y_2 = x_1 + 2x_2$

b) $y_1 = x_1^2 - x_2^2$
 $y_2 = 2x_1 x_2$

c) $x = t^2$
 $y = t^3$
 $z = t^4$

d) $w = x^2 y z$

e) $w = x^2 + y^2 + z^2$

f) $y_1 = x_1 x_2 x_3$
 $y_2 = x_2^2 x_3$

g) $u = x \cos y$
 $v = x \sin y$
 $w = z^2$

Çözüm // g)

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ \sin y & x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

2- $y_1 = x_1^2 + x_2^2$ ile tanımlanan $Y = f(X)$ fonksiyonuna $(2, 1)$ noktasından yaklaşıp, $dY = f_x dx$ doğrusal

dönüşümünü bulunuz. Bundan yararlanarak $f(2.04, 1.01) = ?$

Çözüm //

$$dy_1 = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$$

$$dy_2 = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$$

(2,1) noktasında; $\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$ olur.

$f(2.04, 1.01)$ değerini bulalım.

$f(2+\Delta x_1, 1+\Delta x_2)$ isteniyor demektir.

$\Delta x_1 = dx_1$ ve $\Delta x_2 = dx_2$ alalım.

$dx_1 = 0.04$ $dx_2 = 0.01$ yerine yazalım.

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} dy_1 = 0.18 \\ dy_2 = 0.06 \end{cases} \text{ olur.}$$

$$y_1 = 4+1 = 5 \quad y_2 = 1.2 = 2$$

$y_1 = 5$ ve $y_2 = 2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(2+\Delta x_1, 1+\Delta x_2) &= (y_1 + dy_1, y_2 + dy_2) \\ &= (5 + 0.18, 2 + 0.06) \\ &= (5.18, 2.06) \text{ olur.} \end{aligned}$$

3- Aşağıdaki dönüşümlerin fonksiyonel determinantlarını bulun.

a) $u = x^3 - 3xyz$
 $v = 3xz - y^3$

b) $u = xe^y \cos z$
 $v = xe^y \sin z$
 $w = xe^y$

Çözüm //

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad J &= \left| \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ e^y \sin z & xe^y \sin z & xe^y \cos z \\ e^y & xe^y & 0 \end{vmatrix} \\ &= e^{3y} \begin{vmatrix} \cos z & x \cos z & -x \sin z \\ \sin z & x \sin z & x \cos z \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

4- $y_1 = x_1 x_2 - x_3^2$

$y_2 = x_1 x_2 - x_1 x_3$ ile tanımlanan $Y = f(X)$ fonksiyonuna, (2,1,1)

noktasında yaklaşan $dY = f_x dx$ doğrusal dönüşümünü bulunuz ve

$f(2.01, 1.02, 0.99)$ değerini bulun.

Cevap // $(y_1 + dy_1, y_2 + dy_2) = (1.07, 4.04)$ //

5- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \frac{\partial f}{\partial r} = ? , \frac{\partial f}{\partial \theta} = ? , \frac{\partial f}{\partial \varphi} = ?$$

Çözüm //

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} f_r &= 2x \cdot \cos \theta \sin \varphi + 2y \sin \theta \sin \varphi + 2z \cos \varphi \\ &= 2r \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + 2r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 2r \cos^2 \varphi \\ &= 2r \sin^2 \varphi - 2r \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$f_r = -2r \cos 2\varphi //$$

$$f_\theta = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad \text{olur.} //$$

$$f_\varphi = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi + f_z \cdot z_\varphi \quad \text{olur.} //$$

6- $\mu(s, t) = (x, y)$ olduğuna göre $x = e^s$ ve $y = e^t$ dönüşümüyle

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad \text{denklemini sadeleştirin.}$$

7- $\left. \begin{aligned} y_1 &= x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \\ y_2 &= x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \\ y_3 &= x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{olduğuna göre,} \\ &(1, 0, 0, \dots, 0) \text{ için} \\ &f(1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) = ? \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ \vdots \\ dy_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2x_2 & 2x_3 & \dots & 2x_n \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 & \dots & 2x_n \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 & \dots & 2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ \vdots \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$(1, 0, 0, \dots, 0)$ için $y_1 = 0, y_2 = 1, \dots, y_n = 1$

$$f(1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) = (0, 1, 1, \dots, 1)$$

Problemler:

1- $U = z \sin \frac{y}{x}$

$X = 3r^2 + 2s$

$y = 4r - 2s^3$

$z = 2r^2 - 3s^2$ ise $U_r = ?$ $U_s = ?$

2- $U^2 - U = 3X + Y$ ve $U - 2U^2 = X - 2Y$ ise $U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy} = ?$

3- $z^3 - XZ - Y = 0$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = -\frac{3z^3 + X}{(3z^2 - X)^3}$ olduğunu gösterin.

4- $U = \frac{X+Y}{1-XY}$, $U = \arctan X + \arctan Y$ ise $\frac{\partial(U, U)}{\partial(X, Y)} = ?$

5- $X = U - U^2 + W$
 $Y = U^2 - U^2 + W^2$
 $Z = U^3 + U^3$ $\Rightarrow J = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(U, U, W)} = ?$

6- $U = X^2Y + Y^2Z + Z^2X$ ise $\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Z} = (X+Y+Z)^2$ dir ?

7- $\left. \begin{matrix} X = r \cos \theta \\ Y = r \sin \theta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{r}$ olduğunu gösterin.

8- $\left. \begin{matrix} X = U + U \\ Y = U - U \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial(X, Y)}{\partial(U, U)} = -2$ dir ?

9- $\left. \begin{matrix} X = r \cos \theta \\ Y = r \sin \theta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = r$, $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(X, Y)} = 1$, $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{r}$?

(Bak ANALİZ IV.)

Çok Katlı İntegraller

Önce, bir değişkenli fonksiyonlarla ilgili integral özelliklerini hatırlayalım.

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonu alalım. Bu aralıkta, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ --- (2.1.1)

olacak şekilde alt aralıklara ayıralım. Aralıkların uzunluğu;

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad i\text{. aralığın uzunluğudur.}$$

Bu aralıklarda $x_{i-1} < x_i^* < x_i$ olacak şekilde x_i^* alalım. x_i^* 'a karşılık gelen fonksiyon değeri $f(x_i^*)$ olsun.

h Δx_i lerin en büyüğü olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

toplamının bir limiti varsa, bu limit değerine, f nin $[a, b]$ kapalı aralığındaki belirli integrali denir ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad \text{--- (2.1.2)}$$

bişiminde gösterilir.

Bir $c \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $h < \delta$ koşulunu sağlayan tüm aralıklar için,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - c \right| < \varepsilon \quad \text{--- (2.1.3)}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ var ise (2.1.2) belirli integrali vardır.

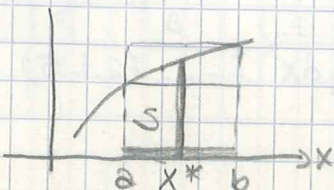
Bu integrale Riemann integrali denir.

Tanım 2.1.2. Bir f fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığındaki ortalama

değeri $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ dir. Bu değer $f(x^*)$ olacak şekilde

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(x^*)$$

olur. $f(x^*)$ 'a ortalama ordinat (fonksiyonun ortalama değeri) denir.



Eğer f sürekli ve $a \leq x \leq b$ aralığındaki her değer için,
 $a_1 \leq x \leq b_1$ olarak, $\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = 0$ oluyorsa $f(x) = 0$

Yine ortalama teoremini kullanarak, f sürekli $\forall x \in [a, b]$ için
 $f(x) \geq 0$ ve $\int_a^b f(x) dx = 0$ ise yine $f(x) = 0$ dır. Eğer $a < b$ ise
 $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ dir ve $a = b$ ise $\int_a^a f(x) dx = 0$ dır.

a, b, c aralığa ait sayılar olmak üzere,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ dir.}$$

$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ belirli integrali, $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığında

tanımlı olduğu gibi, $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonunun

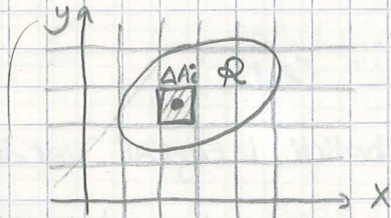
$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$$

integrali de xy -düzleminde, bir kapalı ve sınırlı $\mathcal{R}$ bölgesinde

tanımlı olacaktır. Eğer $\mathcal{R}$ bölgesi sınırlı değilse bir değişkenli
fonksiyonlarda olduğu gibi,

$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx$ 'de has olmayan bir integral olur.

İki katlı bir integralin tanımı: bir değişkenli fonksiyonlardaki
integralin tanımına benzer. $\mathcal{R}$ bölgesi xy -eksenlerine paralel
doğrularla dikdörtgenlere ayrılsın.

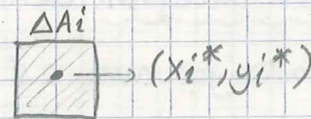


Kabul edelim ki, n -tane dikdörtgen

olsun. Bunları 1 den n -ye kadar

numaralayalım. Dikdörtgenlerin i -sini

alalım. Ve alanı ΔA_i olsun.



Maksimum köşegeni h alalım.

(x_i^*, y_i^*) , i -nci dikdörtgenin herhangi bir noktası olsun.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i \quad \text{--- (2.1.4)}$$

toplamını gözönüne alalım.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dy dx \quad \text{--- (2.1.5)}$$

ile tanımlanan integrale iki katlı integral denir.

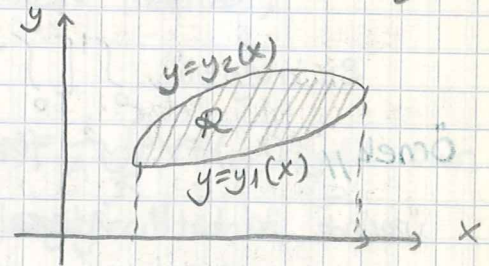
Bir değişkenli fonksiyonlarda belirli integrali alanlarla temsil ettik ve yorumladık. İki değişkenli fonksiyonlarda iki katlı integraller hacimlerle yorumlanır.



(2.1.5) ifadesinde $f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i$, tabanı ΔA_i ve yüksekliği $f(x_i^*, y_i^*)$ olan prizmanın hacmini verir. Bu nedenle iki katlı integral hacim olarak yorumlanır.

$$x_1 \leq x \leq x_2 \text{ ve } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

şeklinde R bölgesi bir integrasyon bölgesidir. Veya $y_1 \leq y \leq y_2$ için, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ dir.



İki Katlı İntegrallerin Hesaplanması

R bölgesinde verilen bir integral,

$$\iint_R f(x,y) dy dx = \int_{x=x_1}^{x_2} \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

sırasına alınarak hesaplanır.

Örnek // $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun köşelerinin koordinatları, $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,2)$ ve $D(1,2)$ olan ABCD dikdörtgeni üzerinde iki katlı integralini bulunuz.

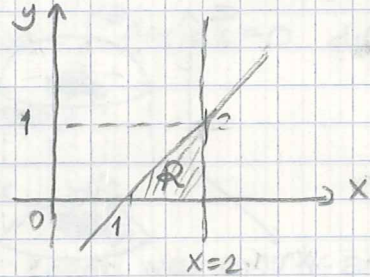


$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y) dy dx &= \iint_R (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_{x=1}^3 \left[\int_{y=1}^2 (x^2 + y^2) dy \right] dx \\ &= \int_1^3 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{7}{3}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x \Big|_1^3 = (9+7) - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right) \\ = 16 + \frac{8}{3} = 40/3 //$$

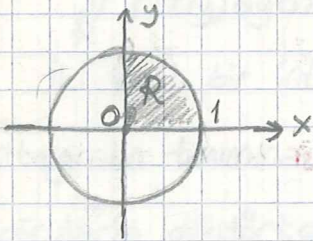
Örnek // $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu için, $x=2, y \geq 0$ ve $y-x+1 \leq 0$ bağıntısıyla tanımlanan iki katlı integrali bulun.

$$\int_{x=1}^2 \left[\int_{y=0}^{x-1} (x^2 + y^2) dy \right] dx \\ = \int_1^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x-1} dx \\ = \int_1^2 \left(x^2(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} \right) dx \\ = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{12} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} //$$



Bu integrali, $\int_0^1 \left[\int_0^{y+1} (x^2 + y^2) dx \right] dy$ şeklinde yazarak bulabiliriz.

Örnek // $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, çemberi üzerinde iki katlı integralini bulun.



$$\iint_R f(x,y) dy dx = \int_{x=0}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx \\ = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ = \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)}{3} - \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} \right) dx$$

$$x = \sin t \\ dx = \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3} \sin^2 t \cos t + \frac{1}{3} \cos t \right) \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3} \sin^2 t \cos^2 t + \frac{1}{3} \cos^2 t \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right) \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right) \right] dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{6} \left(1 - \frac{(1+\cos 4t)}{2} \right) + \frac{1}{6} (1+\cos 2t) \right] dt$$

$$= \frac{1}{6} t - \frac{1}{2} t - \frac{1}{48} \sin 4t + \frac{1}{6} t + \frac{1}{12} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} //$$

bulmuşuz

iki katlı İntegrallerin Özellikleri

(A-1)

$$1- \iint_R [f(x,y) \mp g(x,y)] dy dx = \iint_R f(x,y) dy dx \mp \iint_R g(x,y) dy dx$$

$$2- \iint_R c \cdot f(x,y) dy dx = c \iint_R f(x,y) dy dx$$

$$3- \text{Eğer, } R = R_1 \cup R_2 \text{ ve sınır noktaları çakışık olma şartıyla}$$

$$\iint_R f(x,y) dy dx = \iint_{R_1} f(x,y) dy dx + \iint_{R_2} f(x,y) dy dx \text{ dir.}$$

$$4- \text{Eğer, } A \text{ ; } R \text{ nin alanı ve } x_1, y_1 \in \mathbb{R} \text{ olacak şekilde,}$$

$$\iint_R f(x,y) dy dx = f(x_1, y_1) A$$

ifadesiyle ortalama değer alınır. $f(x_1, y_1) = \frac{1}{A} \iint_R f(x,y) dy dx$ olur.

$f(x_1, y_1)$ değerine f nin ortalama (average) değeri denir.

$$5- R \text{ bölgesinde, } \left| \iint_R f(x,y) dy dx \right| \leq \iint_R |f(x,y)| dy dx \text{ dir.}$$

$$6- \text{Eğer } \forall x,y \in \mathbb{R} \text{ için, } M_1 \leq f(x,y) \leq M_2 \text{ ise } A \text{ da } R \text{ nin alanı,}$$

$$M_1 A \leq \iint_R f(x,y) dy dx \leq M_2 A \text{ dir.}$$

: 10A

$$7- f(x,y), R \text{ bölgesinde kapalı ve sürekli bir fonksiyon olsun.}$$

Eğer R tarafından işerilen her kapalı ve sınırlı R_1 bölgesi için

$$\iint_{R_1} f(x,y) dy dx = 0 \text{ oluyorsa } f(x,y) = 0 \text{ dir.}$$

$$8- \text{Eğer } R \text{ de } f(x,y) \geq 0 \text{ ve } \iint_R f(x,y) dy dx = 0 \text{ oluyorsa } f(x,y) = 0 \text{ dir.}$$

Problemler

$$1- \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \quad \int_0^1 \ln x dx \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x}$$

$$2- \iint_R xy dx dy \text{ integralini } y = \frac{x}{2}, y = \sqrt{x} \text{ ve } x=4, x=2$$

eğrilerinin sınırladığı bölgede hesaplayınız.

3- $\iint_R (2x-y^2) dx dy$ integralini, $R = \{(x,y) | y = -x+1, y = x+1, y=3\}$

doğrularının sınırladığı bölgede hesaplayınız.

Çözümler

27.3.96 / Garpamba

$$1-a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left. \frac{3}{2} x^{2/3} \right|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{3}{2} x^{2/3} \right|_{\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{3}{2} \varepsilon^{2/3} - \left(\frac{3}{2} (3\sqrt{-1})^2 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} (3\sqrt{\varepsilon})^2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{yakınsaktır.} //$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{yakınsaktır.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{yakınsaktır.} //$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

yakınsak.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1 \quad \text{yakınsaktır.} //$$

$$d) \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-1 - \varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1. //$$

Not: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon = 0$

$$e) \int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x} \quad \forall x \in [a, \infty) \text{ için,}$$

$0 \leq f(x), 0 \leq g(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in (0, \infty)$ oluyorsa

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \quad \text{idi.}$$

$$g(x) = \frac{1}{e^x - 2^x} > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \forall x \in [1, \infty) \text{ için}$$

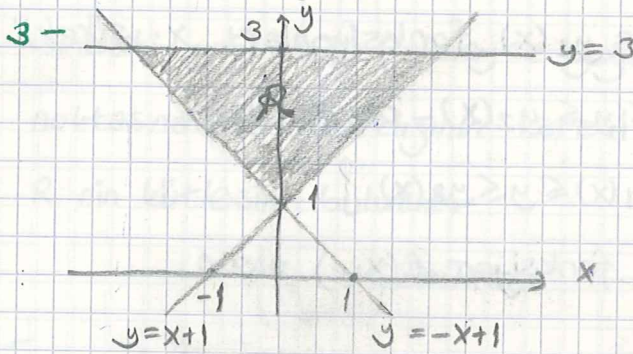
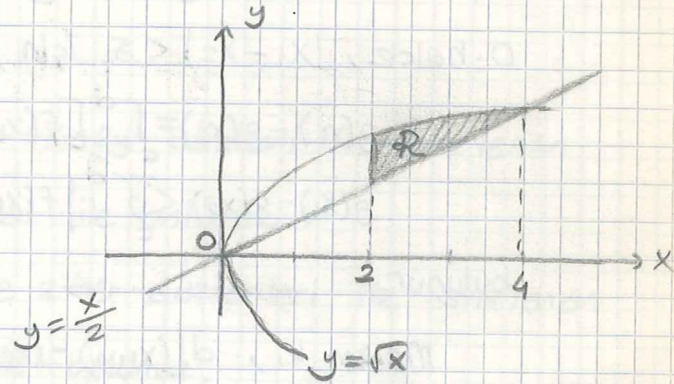
$$f(x) = \frac{1}{e^x} > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2^x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2^x}{e^x} \right) = 1 \in (0, \infty)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x} = -e^{-x} \Big|_1^{\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ yakınsak. olduğundan}$$

$$g(x) = \frac{1}{e^x - 2^x} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x - 2^x} \text{ 'de yakınsaktır. //}$$

$$\begin{aligned} 2- \iint_R xy \, dy \, dx &= \int_2^4 \left[\int_{y=\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right] dx \\ &= \int_2^4 x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx \\ &= \frac{11}{6} // \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \iint_R (2x - y^2) \, dy \, dx &= \\ &= \int_{y=1}^3 \left[\int_{x=1-y}^{y-1} (2x - y^2) \, dx \right] dy \\ &= \int_{y=1}^3 (x^2 - y^2 x) \Big|_{1-y}^{y-1} dy \\ &= -\frac{68}{3} // \end{aligned}$$

Teorem 2.2.1. $a \leq x \leq b$ için $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ in sürekli fonksiyonları

$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ olmak üzere,

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon $f(x, y)$ olsun.

$$a \leq x \leq b \text{ için, } g(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \quad (2.2.1)$$

fonksiyonu sürekli dir.

İspat // Önce $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının sabit fonksiyon olması şartı ile ispatı yapalım.

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy \quad (2.2.2)$$

olur. f fonksiyonu, $a \leq x \leq b$ ve $c \leq y \leq d$ bölgesinde sürekli

olduğundan, düzğün süreklidir. Bu nedenle $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$

sayısı vardır ki, $d|(x_1, y_1), (x_2, y_2)| < \delta$ olduğunda,

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \text{ olacak şekilde seçelim.}$$

0 halde, $|x_1 - x_2| < \delta$ için,

$$g(x_1) - g(x_2) = \int_c^d [f(x_1, y) - f(x_2, y)] dy \text{ olup,}$$

$$g(x_1) - g(x_2) \leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{d-c}$$

bulunur.

Madem ki, $d|(x_1, y) - (x_2, y)| = |x_1 - x_2| < \delta$ dir, 0 halde:

g , $a \leq x \leq b$ aralığında süreklidir.

Teorem: $a \leq x \leq b$ için, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları x sürekli fonksiyonlar olsunlar. $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ olmak üzere

$$G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon $f(x, y)$ olsun.

f 'nin G üzerinde,

$$\int_{x=a}^b \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \text{ integrali vardır.}$$

Alıştırılmalar

1 - $R = \{(x, y) | y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\}$ eğrisiyle

sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

2 - $R = \{(x, y) | y^2 = 9 - x, y^2 = 9 - 9x\}$ eğrileriyle sınırlı bölgenin

alanını bulunuz.

3 - $R = \{(x, y) | y = \sqrt{x}, y = 6 - x, y = 0\}$ sınırlı bölgesi için,

$$\iint_R xy dy dx = ?$$

4 - $R = \{(x, y) | x+y=1, x+y=4, x=0, y=0\}$ ise $\iint_R \frac{dy dx}{x+y} = ?$

5 - Aşağıdaki denklemlerle sınırlanan bölgelerin

iki katlı integral ile alanlarını bulun.

a) $x=0, y=0, x+y=2$

b) $y=x+2, x+y^2=0$

c) $x-y^2=0, x=2y-y^2$

d) $y=x, y^2=2-x^2$

: 704

6- Koordinat düzlemleri ve $z = 4 - 4x - 2y$ düzlemi ile sınırlanan bölgenin hacmini iki katlı integral ile bulunuz.

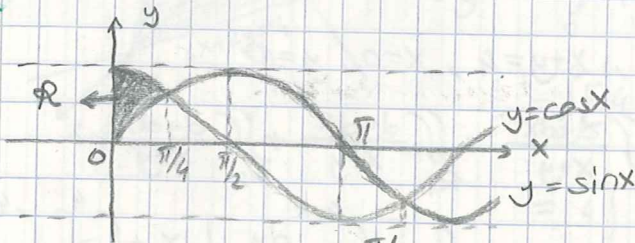
7- $x^2 + y^2 \leq 4$ silindiri, $y+z=4$ ve $z=0$ düzlemleri ile sınırlanan bölgenin hacmini iki katlı integrallerle bulunuz.

8- $R = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ bölgesinin herhangi bir noktadaki yoğunluğu (yüzeyce yoğunluğu) o noktanın $(0,0)$ başlangıç noktasına olan uzaklığının karesi ile orantılı olarak tanımlanıyor. R nin kütlesini bulunuz.

29.3.96/cuma

Çözümler

1-



$$y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_R dy dx = \int_{x=0}^{\pi/4} \left[\int_{y=\sin x}^{\cos x} dy \right] dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = \sqrt{2} - 1 //$$

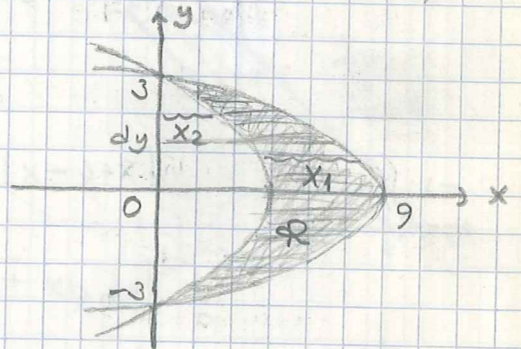
2- I. YOL :

$$S = \int_{-3}^3 (x_1 - x_2) dy = 2 \int_0^3 (x_1 - x_2) dy$$

$$= 2 \int_0^3 (9 - y^2) - (1 - \frac{y^2}{9}) dy$$

$$= 2 \int_0^3 (9 - y^2 - 1 + \frac{y^2}{9}) dy$$

$$= 2 \left| 8y - \frac{8y^3}{27} \right|_0^3 = 2 | 24 - 8 | = 32 //$$



$$\text{II. YOL: } \iint_R dx dy = \int_{y=-3}^3 \left[\int_{x=1-\frac{y^2}{9}}^{2-y^2} dx \right] dy$$

$$= \int_{-3}^3 (2-y^2-1+\frac{y^2}{9}) dy = 32 //$$

Not: iki katlı integral hacim verir. $f(x,y)=1$ ise alanı verir.

3- $y=\sqrt{x}, y=6-x, y=0$

$$y^2=x, y^2=6-y$$

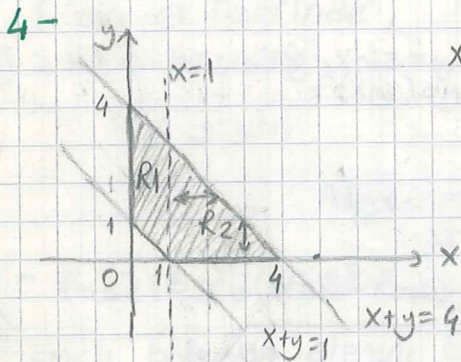
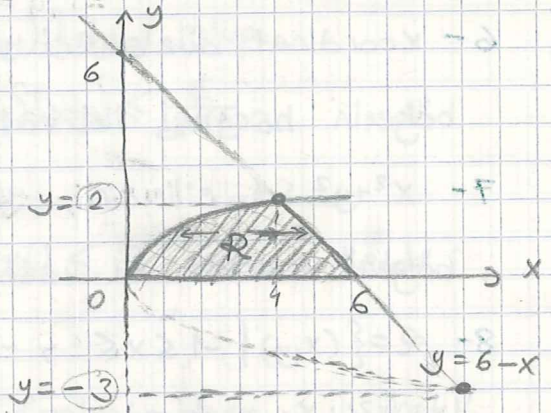
$$y^2+y-6=0, (y+3)(y-2)=0$$

$$\iint_R xy dx dy = \int_{y=0}^2 \left[\int_{x=y^2}^{6-y} xy dx \right] dy$$

$$= \int_{y=0}^2 \frac{x^2 y}{2} \Big|_{y^2}^{6-y} dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{(6-y)^2}{2} - \frac{y^5}{2} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (36y - 12y^2 + y^3 - y^5) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (36y - 12y^2 + y^3 - y^5) dy = 50/3 //$$



$$x+y=1, x+y=4, x=0, y=0$$

$$\iint_R \frac{dy dx}{x+y} = \iint_{R_1} \frac{dy dx}{x+y} + \iint_{R_2} \frac{dy dx}{x+y}$$

$$= \int_{x=0}^1 \left[\int_{y=1-x}^{4-x} \frac{dy}{x+y} \right] dx + \int_{x=1}^4 \left[\int_{y=0}^{4-x} \frac{dy}{x+y} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \ln|x+y| \Big|_{1-x}^{4-x} dx + \int_1^4 \ln|x+y| \Big|_0^{4-x} dx - 2$$

$$\Rightarrow \iint_R \frac{dy dx}{x+y} = \ln|x+4-x| - \ln|x+1-x|$$

$$= \int_0^1 \ln 4 dx + \int_1^4 (\ln 4 - \ln x) dx$$

$$= x \ln 4 \Big|_0^1 + x \ln 4 \Big|_1^4 - (x \ln x - x) \Big|_1^4$$

$$= \ln 4 + 4 \ln 4 - \ln 4 - 4 \ln 4 + 4 - 1$$

$$= 3 //$$

5- c) $x = y^2$, $x = 2y - y^2$

$$y^2 = 2y - y^2 \Rightarrow 2y^2 = 2y$$

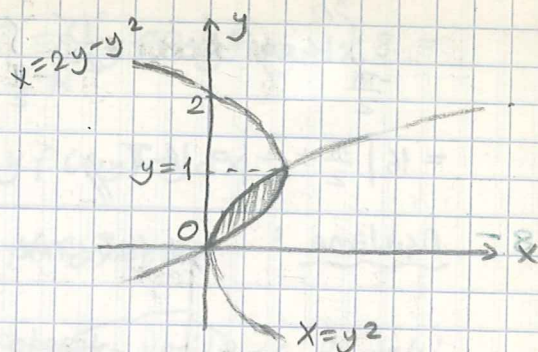
$$\Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow y = 1$$

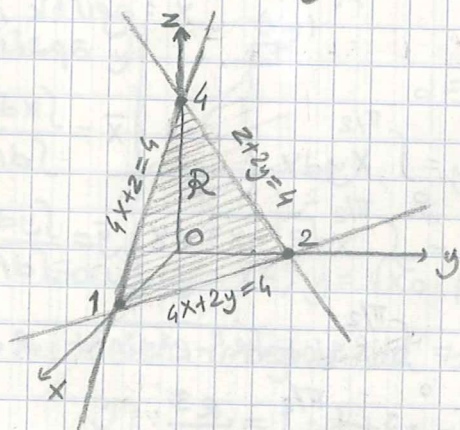
$$\iint_{\mathcal{R}} dy dx = \int_{y=0}^1 \left[\int_{x=2y-y^2}^{y^2} dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 (y^2 - 2y + y^2) dy = \int_0^1 (2y^2 - 2y) dy = \left[\frac{2}{3} y^3 - y^2 \right]_0^1$$

$$= \left| \frac{2}{3} - 1 \right| = \frac{1}{3} //$$



6- $z = 4 - 4x - 2y$



$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dy dx \quad z = f(x,y)$$

$$= \int_{x=0}^1 \left[\int_{y=0}^{2-2x} (4 - 4x - 2y) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(4y - 4xy - y^2 \right) \Big|_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 [4(2-2x) - 4x(2-2x) - (2-2x)^2] dx$$

$$= 4 \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3} //$$

$$\left\{ G = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad V = \frac{a \cdot h}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3} = \frac{4}{3} // \right\}$$

7- $x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{4 - x^2}$
 $y + z = 4$, $z = 4 - y = f(x,y)$

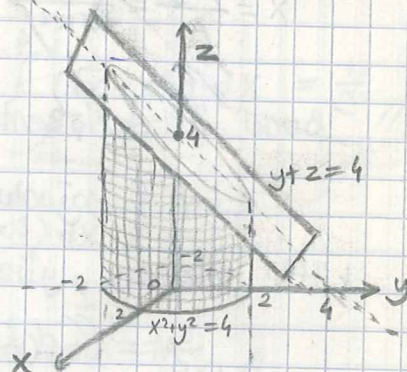
$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dy dx$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (4 - y) dy dx = \int_0^2 \left(\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y) dy \right) dx$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \right] dx = \int_{-2}^2 4 \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (8\sqrt{4-x^2}) dx \quad x = 2\sin t \quad dx = 2\cos t dt$$

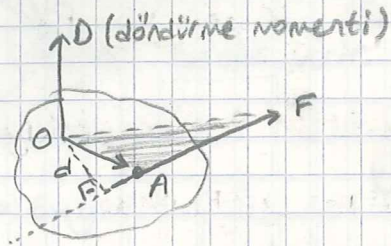
$$= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt$$



$$= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = \frac{1}{2} 32 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 16 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

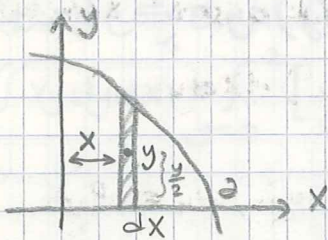
$$= 16 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 16\pi //$$

8- Açıklama :



$$\vec{D} = \vec{OA} \wedge \vec{AF}$$

$$|D| = |F| d$$



$$M_y = \int_0^a x y dA$$

$$M_x = \int_0^a \frac{a}{2} y dA$$

$$A \cdot \bar{x} = M_y$$

$$A \cdot \bar{y} = M_x$$

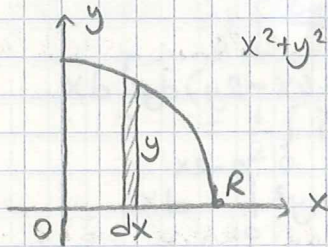
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

M : Moment

A : cismin alanı

$\bar{x}$: ağırlık merkezi
apsisi



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/2} x y dA$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} R \sin t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt$$

$$\Rightarrow M_y = R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = -\frac{R^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{R^3/3}{\pi R^2/4} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = \bar{y}$$

Bunu iki değişkenli fonksiyonlar için yapacağız.

Eğer f yoğunluk olarak yorumlanırsa (birim alana karşı gelen kütle miktarı, yüzeyce yoğunluk),

$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

olarak kütle bulunur. (1 cm³ ünün kütle sine cismin yoğunluğu, 1 cm³ ünün yoğunluğu, cismin özgül ağırlığı denir.)

Eğer f yoğunluk ise R tarafından temsil edilen, ince bir levhanın kütle merkezi olan $\bar{A}(\bar{x}, \bar{y})$ noktasının koordinatları,

$$M\bar{y} = \iint_R x f(x,y) \cdot dy dx \quad M\bar{x} = \iint_R y f(x,y) dy dx$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x f(x,y) dy dx}{\iint_R f(x,y) dy dx}$$

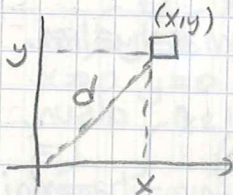
$$\bar{y} = \frac{\iint_R y f(x,y) dy dx}{\iint_R f(x,y) dy dx}$$

$R = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ olarak veriliyor. R deki herhangi bir (x,y) noktasındaki yoğunluk, ρ

$f(x,y) = k(x^2 + y^2)$ olarak veriliyor. (k , orantı sabitidir.)

$$M = \iint_R f(x,y) dx dy = \int_{y=-1}^1 k \int_{x=-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= k \int_{y=-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-1}^1 dy = 2k \int_{-1}^1 \left(y^2 + \frac{1}{3} \right) dy = 8 \frac{k}{3} \quad \text{toplam kütle dir.} //$$

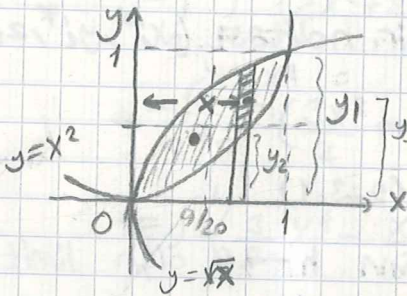


$$d = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d^2 = x^2 + y^2, \quad f(x,y) = k(x^2 + y^2) \text{ olur.}$$

$$\frac{\iint x dy dx}{\iint dy dx}$$

$$\frac{\iint y dy dx}{\iint dy dx}$$

Soru // $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ parabolleri arasında kalan ağırlık merkezini, iki katlı integral ile bulun.



$$\bar{x} = \frac{\iint_R x dy dx}{\iint_R dy dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y dy dx}{\iint_R dy dx}$$

$$A = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3} //$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x dy dx = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx = \frac{3}{20} //$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{3}{20} //$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{3/20}{1/3} = \frac{9}{20} = 0,45$$

benzer şekilde,

$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3} \text{ alanı bulunur.}$$

$$M_y = \int_0^1 x(y_1 - y_2) dx = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{3}{20} //$$

0 halde tek katlı integralle de aynı sonuç bulunur.

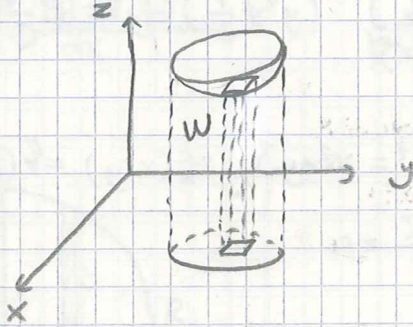
$$M_x = \int_0^1 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) (y_1 - y_2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{9}{20} = \bar{y}$$

Üç Katlı İntegraller

5.4.96 / Cuma

$f(x, y, z)$ fonksiyonu, kapalı ve sınırlı bir W bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. W 'yi koordinat eksenlerine paralel düzlemlerle prizmalara ayıralım.



Bu W bölgesinde oluşturulan

prizmaları numaralıyalım.

Bunların sayısı n olsun.

i -nci prizmanın hacmini

ΔV_i ile gösterelim. Bu ΔV_i .

ΔV_i prizmalarının (cisim köşegeni) köşegenlerinin maksimumu

h olsun. i -nci prizmanın herhangi bir noktası (x_i^*, y_i^*, z_i^*)

olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta V_i \quad \text{--- (2.3.1)}$$

toplamını oluşturalım. Eğer bu toplamın $h \rightarrow 0$ için limiti

alınırsa, yani $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, bu limit değerine

$f(x, y, z)$ fonksiyonunun W bölgesinde üç katlı integrali denir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta V_i = \iiint_W f(x, y, z) dV$$

$$= \iiint_W f(x, y, z) dz dy dx \quad \text{--- (2.3.2)}$$

(1 ise hacimdir.)

bişiminde gösterilir.

Eğer $f(x, y, z)$, W de sürekliyse, (2.3.2) ifadesinin

limitinin varlığı ve dolayısıyla $f(x, y, z)$ nin üç katlı integralinin

varlığı söz konusudur.

W bölgesinin, $x_1 \leq x \leq x_2$ ve $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ ve $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$ biçiminde verilsin.

Bu halde üç katlı integral :

$$\iiint_W f(x,y,z) dz dy dx = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

Örnek // W bölgesi; $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq z \leq x+y$

eşitsizlikleri ile verilsin. f de bu bölgede $f(x,y,z) = 2x - y - z$ biçiminde verilsin. Bu taktirde ,

$$\iiint_W f(x,y,z) dz dy dx = ?$$

Gözüm //

$$= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} \int_{z=0}^{x+y} (2x - y - z) dz dy dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} \left(2xz - yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{x+y} dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(2x(x+y) - y(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} \right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(2x^2 + 2xy - xy - y^2 - \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} \right) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} \right) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2 y}{2} + \frac{3y^3}{6} \right) \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^4 - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{3}{10} x^5 - \frac{x^7}{14} \Big|_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{14} = \frac{8}{35} //$$

Üç katlı integrallerin kullanım alanları pek çoktur.

kütle, kütle merkezi, ağırlık, ağırlık merkezi, hacim v.s. gibi ve mekanik'in birçok bölümünde kullanılmaktadır.

Eğer $f(x,y,z) = 1$ alınırsa, üç katlı integral tanımından

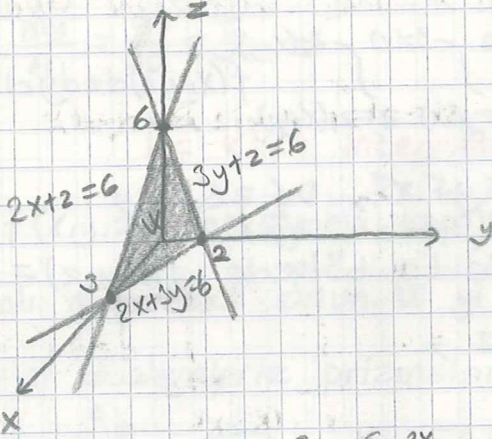
$$\iiint_W dV = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n \Delta V_i \quad \text{--- (2.3.3.)}$$

(cisim köşegeni)

integrali, integrasyon bölgesinin (W nin) hacmini verir.

$$V = \iiint_W dV = \iiint_W dz dy dx \quad \text{dir.}$$

Örnek // $x=0, y=0, z=0$ ve $2x+3y+z=6$ düzlemleriyle sınırlanan bölgenin hacmini bulunuz.



$$V = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6}{3} = 6 \text{ br}^3$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_W dz dy dx = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\frac{6-2x}{3}} \int_{z=0}^{6-2x-3y} dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\frac{6-2x}{3}} (6-2x-3y) dy dx \\ &= \int_{x=0}^3 \left(6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_0^{\frac{6-2x}{3}} dx \\ &= \int_0^3 \left[12 - 4x - 2x \left(\frac{6-2x}{3} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{6-2x}{3} \right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2}{3}x^2 \right) dx = 6 \text{ br}^3 \end{aligned}$$

$$\text{Veya } V = \int_{y=0}^2 \int_{x=0}^{\frac{6-3y}{2}} \int_{z=0}^{6-2x-3y} dz dx dy \quad \text{Veya } V = \int_{z=0}^6 \int_{y=0}^{\frac{6-z}{3}} \int_{x=0}^{\frac{6-3y-z}{2}} dx dy dz$$

Yoğunluğu her noktada, koordinatları $\delta(x_i, y_i, z_i)$ gibi, sürekli bir fonksiyon olan bir cisim verilmiş olsun.

Bu cisimin $P(x_i, y_i, z_i)$ noktası komşuluğundaki hacmi

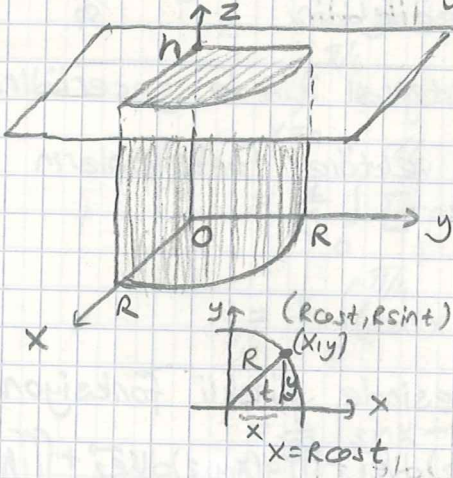
ΔV_i olsun. Bu parçanın kütlesi $\Delta m_i = \delta(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \dots (2B.4)$

Bu verilere göre $M = \iiint_W \delta(x, y, z) dz dy dx \dots (2-3.5)$

olarak cismin kütlesi bulunur.

Cismin homojen olması durumunda, $\delta(x,y,z) = k$ sabittir.
(homojen = her yerde yoğunluk aynıdır.)

Örnek // Yoğunluğu $\delta = k$ olan, $x \geq 0, y \geq 0, z = 0, z = h > 0$
ve $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ denklemiyle tanımlı ^{bögenin} kütlelerini bulunuz.



$$\begin{aligned} M &= \iiint_W \delta(x,y,z) dz dy dx \\ &= \iiint_W k dz dy dx \\ &= k \int_{x=0}^R \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=0}^h dz dy dx \\ &= kh \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= kh \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx = kh \int_{\pi/2}^0 \sqrt{R^2-R^2\cos^2 t} \cdot (-R\sin t) dt \\ &= kh \int_{\pi/2}^0 (-\sin^2 t) R^2 dt = kR^2 h \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right) dt \\ &= kR^2 h \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{k\pi R^2 h}{4} // \end{aligned}$$

Kütle merkezinin koordinatları $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ise

$$M\bar{x} = \iiint_W x \delta(x,y,z) dz dy dx, \quad M\bar{y} = \iiint_W y \delta(x,y,z) dz dy dx$$

yoğunluk moment

ve $M\bar{z} = \iiint_W z \delta(x,y,z) dz dy dx$ ile hesaplanır.

2.4. Vektörel Fonksiyonların integrali

$t \in [a,b]$ olmak üzere $f(t), g(t), h(t)$ bu aralıkta sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu taktirde,

$$\vec{F}(t) = f(t)\vec{e}_1 + g(t)\vec{e}_2 + h(t)\vec{e}_3 \quad (2.4.1)$$

vektörel fonksiyonu da aynı aralıkta, t değişkeninin bir fonksiyonudur. Buna göre

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \int_a^b f(t) dt \vec{e}_1 + \int_a^b g(t) dt \vec{e}_2 + \int_a^b h(t) dt \vec{e}_3$$

bişiminde tanımlanan integrale vektörel integral denir.

Bu integral,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(t_i^*) \Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(t) dt \quad (2.4.2)$$

toplamın limiti olarak da ifade edilebilir.

(integral özellikleri, vektörel integral için de geçerlidir.)

Benzer şekilde, tek değişkenli vektörel fonksiyonların integralleri de tanımlanabilir.

$$\vec{F} = f\vec{e}_1 + g\vec{e}_2 + h\vec{e}_3$$

vektörel fonksiyonu bir $\mathcal{W}$ bölgesinde sürekli fonksiyondur ve

$$\iiint_{\mathcal{W}} \vec{F}(x,y,z) dV = \iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z) dV \vec{e}_1 + \iiint_{\mathcal{W}} g(x,y,z) dV \vec{e}_2 + \iiint_{\mathcal{W}} h(x,y,z) dV \vec{e}_3$$

olur.

Alıştırmalar

1- $0 \leq x < \infty$ olmak üzere, OX eksenine boyunca uzanan ve yoğunluğu $\delta = kxe^{-x^2}$ olan doğrusal cismin kütlesini bulunuz.

(yoğunluk : x eksenine boyunca kütle miktarıdır.)



$$dM = dx \cdot \delta$$

$$M = \int_0^{\infty} \delta dx = \int_0^{\infty} kxe^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} -x^2 &= u \\ -2xdx &= du \\ dx &= \frac{du}{-2x} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{k}{2} (-e^u) du = \frac{k}{2} \left| -e^{-x^2} \right|_0^{\infty}$$

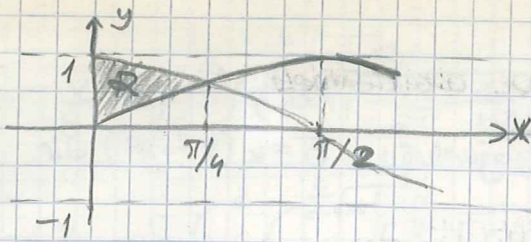
$$\Rightarrow M = \frac{k}{2} //$$

2- $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ olmak üzere, $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri Oy ekseninde, düzlemsel cismin yoğunluğu, $\delta = ky^2$ dir. Cismin kütlesini bulunuz.

($\uparrow$ boyca yoğunluk)

Örneği şurada, δ nin birimi cm^2/gr isabet eden kütle miktarıdır. (cm^2/gr -kütle)

Buradaki δ nin birimi (cm^2/gr -kütle) dir. (Yüzeyce yoğunluk.)



$$\begin{aligned}
 M &= \iint_R \delta \, dy \, dx = \int_{x=0}^{\pi/4} \int_{y=\sin x}^{\cos x} k y^2 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=0}^{\pi/4} k (\cos^3 x - \sin^3 x) \frac{dx}{3} = \frac{k}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \sin^3 x) \, dx \\
 &= \frac{k}{3} \int_0^{\pi/4} [\cos x (1 - \sin^2 x) - \sin x (1 - \cos^2 x)] \, dx \\
 &= \frac{k}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin^2 x \cos x - \sin x + \cos^2 x \sin x) \, dx \\
 &= \frac{k}{3} \left| \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right|_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{k}{3} \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{8 \cdot 3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 8} - (1 - \frac{1}{3}) \right| \\
 &= \frac{k}{3} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{2}{3} \right) = \frac{k}{3} \left(\frac{5\sqrt{2}-4}{6} \right) //
 \end{aligned}$$

3- Doğrusal bir cisim OX ekseninde $0 \leq x \leq 2a$ aralığı boyunca yerleştirilmiştir. Cismin yoğunluğu her noktada $\delta = kx^n$ dir. Cismin ağırlık merkezini bulunuz.

(Ağırlık merkezi $2a$ 'ya daha yakındır.)

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{2a} \delta \, dx = \int_0^{2a} k x^n \, dx = k \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{2a} = k \frac{(2a)^{n+1}}{n+1} // \\
 &= \frac{k}{n+1} \cdot 2^{n+1} \cdot a^{n+1}
 \end{aligned}$$

moment

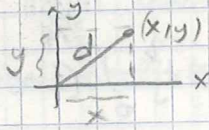
$$M_y = \int_0^{2a} x \delta \, dx = \int_0^{2a} x \cdot k x^n \, dx = \int_0^{2a} k x^{n+1} \, dx = \frac{k}{n+2} 2^{n+2} a^{n+2}$$

Cismin ağırlık merkezinin apsisi $\bar{x}$ olsun. $M\bar{x} = M_y$ dir.

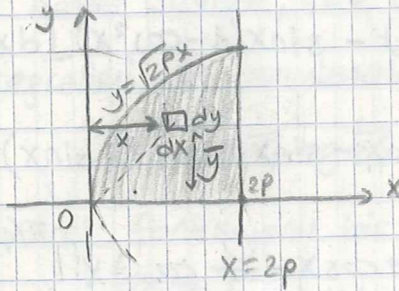
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_0^{2a} x \delta \, dx}{\int_0^{2a} \delta \, dx} = \frac{n+1}{n+2} \cdot 2a \Rightarrow \bar{x} = (2a) \frac{n+1}{n+2} //$$

4- $y^2 = 2px$, $x = 2p$, $p > 0$, $y \geq 0$, denklemiyle tanımlı düzlensel cismin her noktadaki yoğunluğu $\delta = k(x^2 + y^2)$ dir. Cismin ağırlık merkezini bulunuz.

(Yoğunluk, cismin orjine olan uzaklığının karesine göre değişir. Yani,



$$d^2 = x^2 + y^2$$



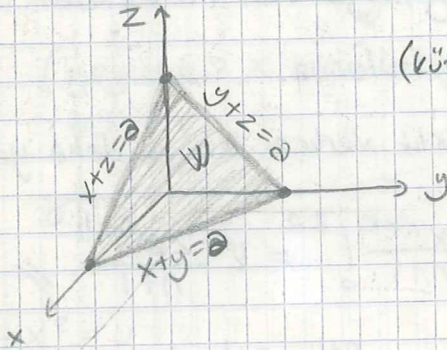
$$M = \int_{x=0}^{2p} \int_{y=0}^{\sqrt{2px}} k(x^2 + y^2) dy dx$$

$$M\bar{x} = \int_{x=0}^{2p} \int_{y=0}^{\sqrt{2px}} x \cdot k(x^2 + y^2) dy dx = M_y$$

$$M\bar{y} = \int_{x=0}^{2p} \int_{y=0}^{\sqrt{2px}} y \cdot k(x^2 + y^2) dy dx = M_x$$

olarak bulunur. //

5- $x + y + z = a$, $a > 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemleriyle sınırlanmış bölge üzerinden $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = ?$



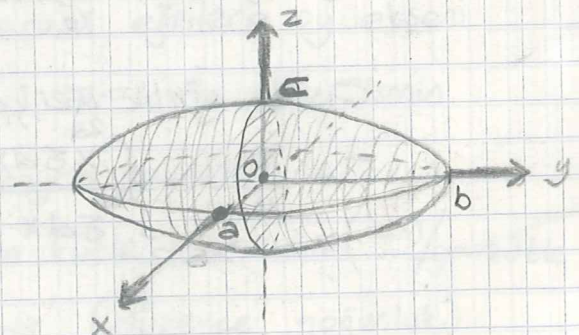
(kütle merkezinin orjine göre ağırlık momentini tensil eder.)

$$\begin{aligned} & \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{a-x} \int_{z=0}^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= -\frac{2a^5}{3} // \end{aligned}$$

6- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidinin hacmini bulunuz.

$$\frac{V}{8} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz dy dx =$$

$$\begin{aligned} z=0, & \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \\ & \quad xy \text{ düzlemi eliptiktir.} \\ & \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{V}{8} = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dy dx$$

$$\Rightarrow \frac{V}{8} = c \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} \left[\left(\frac{a^2-x^2}{a^2} \right) b^2 - y^2 \right]} dy dx$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \cos^2 t dt dx$$

$$= \frac{c}{b} \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt dx$$

$$= \frac{bc}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{bc}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \frac{\pi}{2} dx = \frac{bc\pi}{4a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{abc}{6} \pi$$

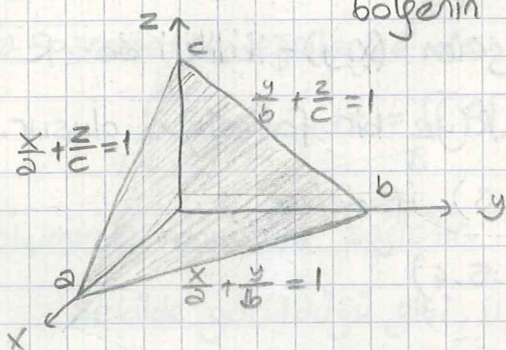
$$\Rightarrow \frac{V}{8} = \frac{\pi}{6} abc \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi abc \quad // \text{ elipsoidin hacmidir.}$$

$$\left\{ V_{\text{küre}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad R=a=b=c \text{ olur.} \right\}$$

12.4.96/CUMA

7- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x=0, y=0, z=0$ düzlemleriyle sınırlanan

bölgenin hacmini bulunuz.



$$V = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b(1-x)}{a}} \int_{z=0}^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz dy dx$$

$$= \frac{abc}{6} //$$

8- R bölgesi ; köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ olan üçgen belirttiğine göre ve $\vec{F}(x,y) = x^2 y \vec{e}_1 + x y^2 \vec{e}_2$ olduğuna göre

$$R \text{ bölgesinde } \iint_R \vec{F}(x,y) dA = ?$$

9- $\iiint_W (dx dy dz / (x+y+z+1)^3)$ integralini. $x=0, y=0, z=0$, $x+y+z=1$ sınırlanan W bölgesinde hesaplayınız.

2.5. İntegral Almada Değişken Değiştirme

Bir değişkenli fonksiyonlarda $f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ sürekli olsun.

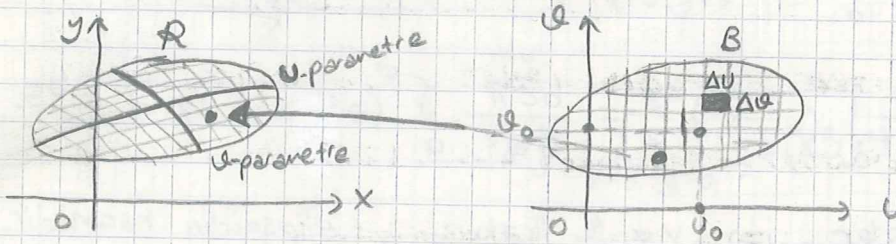
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)] \frac{dx}{du} du \quad \dots (2.5.1)$$

olur. $x=x(u)$ dönüşümü yapılmıştır.

$$x_1 = x(u_1) \quad x_2 = x(u_2) \quad \dots (2.5.2) \quad \text{dir.}$$

$x=x(u)$ ifadesi ; $u_1 \leq u \leq u_2$ şeklinde olup, $f(x(u))$ bu aralıkta sürekli dir.

A- Düzlemsel Bölgelerin Dönüşümleri :



xy -de sınırlı bir bölge R , uv -de sınırlı bir bölge B olsun.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \dots (2.5.3)$$

funksiyonları uv -düzleminde tanımlı olsun. (u, v) ikilileri B bölgesini tararken, bunlara karşı gelen (x, y) -ikilileri de R bölgesini tararlar. Böylece B den R 'ye bir fonksiyon oluşur.

a- Bu fonksiyonun 1:1 olması ile (2.5.3) ifadeleri ;

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \quad \dots (2.5.4)$$

denklemleri çözülebilir.

b- (2.5.3), (2.5.4) sürekli ve kısmî türevleri var olsun.

c- (2.5.3) 'e ait

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

funksiyonel determinanti B bölgesinde sıfırdan farklı olsun.

Bu dönüşümün ters dönüşümü ile $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ fonksiyonel determinanı arasında,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \text{ bağıntısı vardır.}$$

Buna göre de $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, $\mathbb{R}$ de sıfırdan farklıdır.

B- Düzlemde Eğrisel Koordinatlar :

Yukarıdaki bölge dönüşümünde $\mathcal{B}$ de $u=u_0$ doğrusu (2.5.3) dönüşümü altında, $\mathbb{R}'$ de,

$$x = x(u_0, v), y = y(u_0, v) \text{ ---- (2.5.5)}$$

şeklini alır. Burada v parametredir. $v=v_0$ doğrusu $\mathbb{R}$ de,

$$x = x(u, v_0), y = y(u, v_0) \text{ ---- (2.5.6)}$$

eğrisine dönüşür. Burada da u parametredir.

Böylece uv -düzleminde eksenlere paralel doğrular xy -düzleminde, birbirine paralel eğrilere dönüşür. Bu eğrilere koordinat eğrileri denir. Şekilde görülen u -parametre ve v -parametre eğrilerine de eğrisel koordinatlar denir.

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x,y) dy dx = \iint_{\mathcal{B}} f[x(u,v), y(u,v)] \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv \text{ ---- (2.5.7)}$$

biçiminde dönüşüm sağlanır.

Şekilde görüldüğü gibi, $u=\text{sabit}$ ve $v=\text{sabit}$ eğrileri, $\mathbb{R}$ bölgesini ΔA alanlara ayırır. ΔA alanı ile $z=f(x,y)$ yüzeyi arasında; hacime, $f(x,y)\Delta A$ 'lar yardımıyla yaklaşılabilir. Bu ΔA alanı uv -düzlemindeki $\Delta u \cdot \Delta v$ nin bir katıdır. Yani $\Delta A = k \Delta u \cdot \Delta v$ dir. Eğer f 'de u, v cinsinden yazılırsa,

$$\iint_{\mathcal{B}} f[x(u,v), y(u,v)] k \cdot \Delta u \cdot \Delta v \text{ ---- (2.5.8)}$$

iki katlı integrale,

$$\leq f[x(u,\theta), y(u,\theta)] k \cdot \Delta u \cdot \Delta \theta \quad (2.5.9)$$

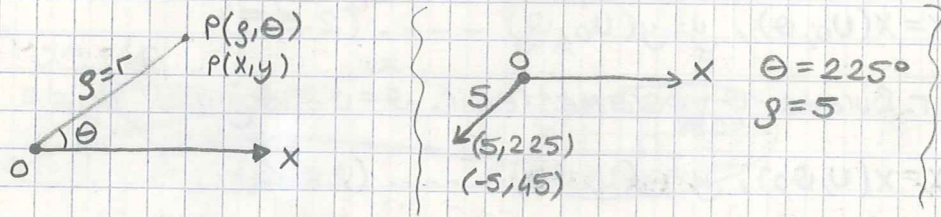
karşı gelir. Bunun limiti (2.5.8) integralini verir. Burada,

$$k = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\theta)} \quad (2.5.10)$$

dir. k sayısı, xy -düzlemindeki ΔA_{xy} alanının uv -düzlemindeki ΔA_{uv} 'ye oranıdır. Yani,

$$k = \frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}} \Rightarrow \lim \frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\theta)} \right| = k \quad (2.5.11)$$

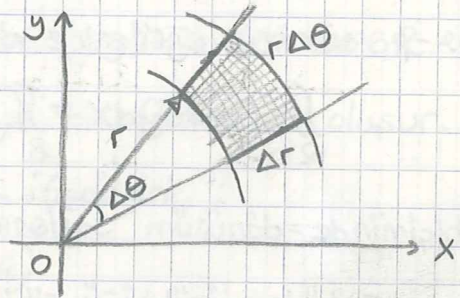
C- Düzlemde Kutupsal Koordinatlar :



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$ } değişken değişimini yaparsak, (2.5.3) deki eğrisel koordinatlar, kutupsal koordinatlar olur.

Alan elemanı ise şekilde görüldüğü gibi yaklaşık olarak kenarları Δr ve $r \cdot \Delta \theta$ olan dikdörtgendir. Böylece,



$\Delta A = \Delta r \cdot r \cdot \Delta \theta$ olup, iki katlı integral için,

(şekil; sıfıra çok yakın veya ∞ küçük olarak düşünülmelidir.)

$$\iint_R f(x,y) dy dx = \iint_S f[r \cos \theta, r \sin \theta] r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \quad (2.5.12)$$

eşitliği gerçekleşir. Gerçekten jacobian matrisini bulursak,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$|j| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

olur. Buna göre ;

$$\iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta$$

olur.

Örnek // $r = a(1 + \sin\theta)$ kardioidi ile $r = a\sin\theta$ çemberi, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ doğrusu tarafından sınırlanan R bölgesinin alanını iki katlı integralle bulun.

Çözüm // Düzlemsel bir bölgenin alanını bulurken $f(x,y) = 1$ alınır.

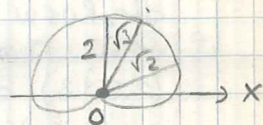
Burada $f(r,\theta) = 1$ alınacaktır. Böylece,

$$A = \iint_R r dr d\theta = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta$$

$$A = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=a\sin\theta}^{a(1+\sin\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} [a^2(1+\sin\theta)^2 - a^2\sin^2\theta] d\theta$$

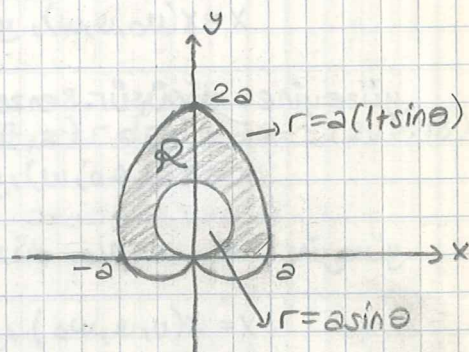
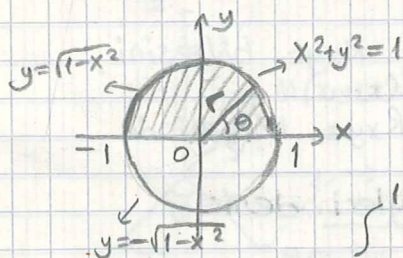
$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\sin\theta) d\theta = \frac{1}{2} a^2 [\theta - 2\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 (\pi + 2 + 2) = \frac{a^2}{2} (\pi + 4) //$$



Örnek // $\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dy dx$

integralini kutupsal koordinatlara dönüştürerek bulun.



θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
r	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$	2	0

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2} dy dx = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta)^{3/2} r dr d\theta$$

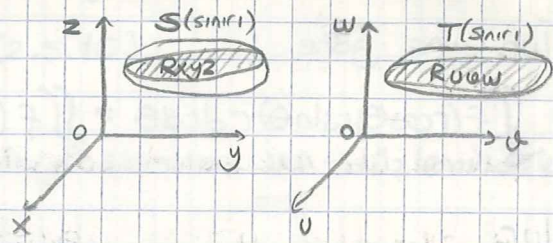
$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 r^4 dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 d\theta = \frac{\pi}{5} //$$

0- Üç Boyutlu Uzaylarda Bölge Dönüşümleri :

Üç boyutlu uzayda iki koordinat sistemi (x,y,z) ve (u,v,w) olsun. Bu koordinat sistemlerinde sınırlı iki bölge R_{xyz} , R_{uvw} olsun.

Bu bölgelerin noktaları arasında

1:1 bir eyleme var olsun.



Bu bir dönüşüm olarak alındığında,

$$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w) \dots (2.5.13)$$

şekliyle yazılır. Bu dönüşümün tersi,

$$u=u(x,y,z), v=v(x,y,z), w=w(x,y,z) \dots (2.5.14)$$

dir. Bu dönüşümler, sürekli ve birinci basanaktan türevleri mevcut olan fonksiyonlardır. Bu durumda

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \cdot \left| \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \right| = 1$$

dir. R_{uvw} bölgesinde $u=u_0$ düzlemi (vw düzlemine paraleldir.)

(2.5.13) dönüşümü altında

$$x=x(u_0,v,w), y=y(u_0,v,w), z=z(u_0,v,w) \dots (2.5.15)$$

yüzeyine dönüşür. Benzer şekilde, $v=v_0$ düzlemi için de,

$$x=x(u,v_0,w), y=y(u,v_0,w), z=z(u,v_0,w) \dots (2.5.15)'$$

yüzeyine ve $w=w_0$ düzlemi de,

$$x=x(u,v,w_0), y=y(u,v,w_0), z=z(u,v,w_0) \dots (2.5.15)''$$

yüzeyine dönüşür. O halde her üç grup düzlemde R_{xyz} bölgesini, birbirine paralel yüzeylerle bölüntülere ayırdık. R_{xyz} bölgesinde bu bölüntüleri ayıran yüzeylere, koordinat yüzeyleri denir.

(u,v,w) noktası, 3-boyutlu uzayda, R_{xyz} deki noktanın eğrisel

koordinatlarıdır. Böylece iki katlı integraller için verdiğimiz

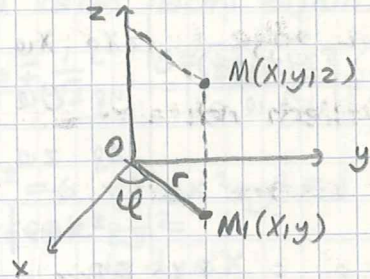
değişken değişimi modeli, 3 katlı integraller için de geçerlidir. Şöyle ki;

$$\iiint_{R_{xyz}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{R_{uvw}} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw \quad (2.5.16)$$

dir.

E - Silindirik Koordinatlar :

Şekilde M_1 noktasının koordinatları $M_1(x,y)$ dir. Bunun kutupsal koordinatları ise $M_1(r, \varphi)$ dir. Böylece M noktasının koordinatları,



$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\}$ olup, bu koordinatlara, M nin silindirik koordinatları denir. M noktası ;

$M(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ ile belirlenir.

$(0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty)$ Burada R_{xyz} sisteminden $R_{r\varphi z}$ sistemine bir dönüşüm yapılmıştır. Bu dönüşümün fonksiyonel determinanı ;

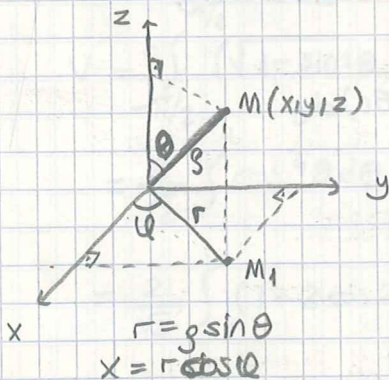
$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (2.5.17)$$

dir. O halde ,

$$\iiint_{R_{xyz}} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{R_{r\varphi z}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz \quad (2.5.18)$$

olur.

F - Küresel Koordinatlar :



M_1 noktasının kutupsal koordinatları, $M_1(r, \varphi)$ dir. $M(x,y,z)$ noktasının koordinatları, $M(\rho, \varphi, \theta)$ dir. (ρ, φ, θ) ya, M noktasının küresel koordinatları denir. Bu koordinatlar ile Kartezyen koordinatlar arasında ;

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin \theta \\ x &= r \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \rho \cos \theta \end{aligned} \right\} \text{ olup, } \begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \\ -\pi &\leq \theta \leq \pi \end{aligned} \text{ dir.}$$

Burada Rxyz sisteminin Rg φ θ sistemine bir dönüşüm yapılmıştır.

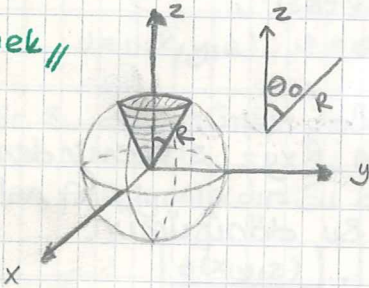
$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_\theta \\ y_\rho & y_\varphi & y_\theta \\ z_\rho & z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= |-\rho^2 \sin \theta| = \rho^2 \sin \theta \quad (2.5.19)$$

$$\iiint_{Rxyz} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{Rg\varphi\theta} f(\rho,\varphi,\theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \quad (2.5.20)$$

olur.

Örnek //



$f(\rho,\varphi,\theta) = \rho^3 \cos \theta$ fonksiyonunun, şekilde görülen koninin, küre içinde kalan kısmı üzerinden 3 katlı integralini bulun. Ayrıca şekildeki koninin hacmini bulun.

Çözüm // Kürenin, kutupsal koordinatlarda denklemi $\rho = R$ dir.

Koninin, denklemi ise $\theta = \theta_0$ dir.

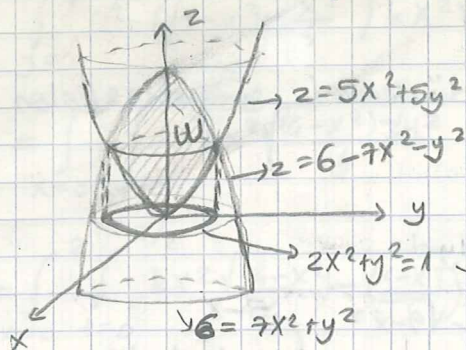
$$\begin{aligned} \iiint_W f(\rho,\varphi,\theta) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| d\rho d\varphi d\theta &= \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \rho^3 \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^5 \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^R \rho^5 \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \varphi \Big|_0^{2\pi} d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^R \rho^5 \pi \sin^2 \theta_0 d\rho = \frac{R^6 \pi}{6} \sin^2 \theta_0 \quad // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| d\rho d\varphi d\theta = \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2 (1 - \cos \theta_0) d\varphi d\rho = \int_{\rho=0}^R \rho^2 \cdot 2\pi (1 - \cos \theta_0) d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos \theta_0) \quad \text{br } 3 \quad // \end{aligned}$$

Alistirmalar

19.4.96/CUMA

1-

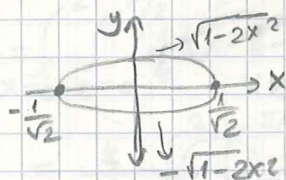
 $z = 5x^2 + 5y^2$ paraboloidi ve $z = 6 - 7x^2 - y^2$ eliptik paraboloidi

arasında kalan hacmi bulun.

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x^2 &= 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \pm \sqrt{1 - 2x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2 \Rightarrow 12x^2 + 6y^2 = 6 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1 \text{ elipstir.}$$

$$V = \iiint_W dz dy dx = \int_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{z=5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz dy dx$$



$$\Rightarrow V = \int_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6 - 7x^2 - y^2 - 5x^2 - 5y^2) dy dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6 - 12x^2 - 6y^2) dy dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ 6y - 12yx^2 - 2y^3 \right\}_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ 6(\sqrt{1-2x^2}) - 12(\sqrt{1-2x^2})x^2 - 2(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} - \right. \\ \left. + 6\sqrt{1-2x^2} - 12\sqrt{1-2x^2} \cdot x^2 - 2(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2} \right\} dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ 12\sqrt{1-2x^2} - 24x^2\sqrt{1-2x^2} - 2\sqrt{1-2x^2} + 4x^2\sqrt{1-2x^2} - \right. \\ \left. - 2\sqrt{1-2x^2} + 4x^2\sqrt{1-2x^2} \right\} dx$$

$$\Rightarrow V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (8\sqrt{1-2x^2} - 16x^2\sqrt{1-2x^2}) dx = 8 \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)^{3/2} dx$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta$$

$$V = 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sqrt{1-\sin^2 \theta})^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta d\theta$$

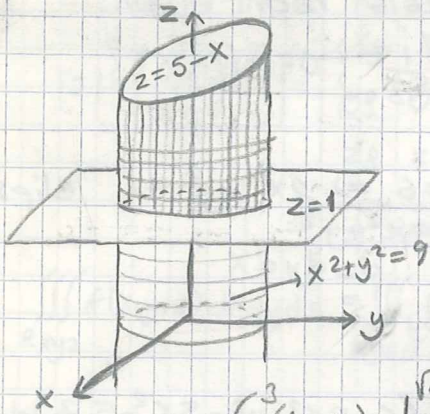
$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int (1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}) d\theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2} \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{2} \sqrt{2} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} //$$

2- $x^2 + y^2 = 9$ silindiri, $z=1$ ve $z=5-x$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



$$\begin{aligned} V &= \iiint_W dx dy dz \\ &= \int_{x=-3}^3 \int_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{z=1}^{5-x} dz dy dx \\ &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x) dy dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \int_{-3}^3 (4-x)y \Big|_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dx = \int_{-3}^3 2(4-x)\sqrt{9-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} x &= 3\sin\theta \\ \Rightarrow V &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4-3\sin\theta)\sqrt{9-9\sin^2\theta} 3\cos\theta d\theta \end{aligned}$$



$$\Rightarrow V = 18 \int (4-3\sin\theta) \cos^2\theta d\theta$$

$$\Rightarrow V = 18 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1+\cos 2\theta) - 3\cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

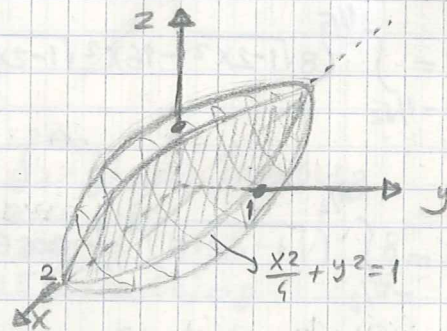
$$= 18 \left[2\theta + \sin 2\theta + \cos^3\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 18(\pi + \pi) = 36\pi \text{ br}^3 //$$

3- $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ elipsoidi ile sınırlanmış bir cismin yoğunluğu

$S = kx^2$ dir. Cismin kütlesini bulun.

Bu cisim dönel olduğu için

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ olan birinci bölgedeki kısmını bulalım.



$$\begin{aligned} \frac{M}{8} &= \iiint_W \delta dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2/4}} \int_{z=0}^{\sqrt{1-y^2-\frac{x^2}{4}}} kx^2 dz dy dx \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{8} = \frac{4\pi}{15} k \Rightarrow M = \frac{32\pi k}{15} //$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \left(\sqrt{1-y^2-\frac{x^2}{4}} \right) k x^2 dy dx &= \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} k x^2 \sqrt{\frac{(4-x^2)-4y^2}{4}} dy dx = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} k \cdot x^2 \sqrt{(4-x^2)-4y^2} dy dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{t=0}^{\pi/2} k x^2 \sqrt{\frac{(4-x^2)}{4} - \left(\frac{4-x^2}{4}\right) \sin^2 t} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \cos t dt dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{t=0}^{\pi/2} k x^2 \left(\frac{4-x^2}{4} \right) \cos^2 t dt dx \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \sin t \\ dy = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \cos t dt \\ y=0 \Rightarrow t=0 \\ y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right. \\
 &= \int_{x=0}^2 \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{1}{4} k x^2 (4-x^2) (1 + \cos 2t) dt dx \\
 &= \frac{k}{8} \int_{x=0}^2 \int_{t=0}^{\pi/2} x^2 (4-x^2) (1 + \cos 2t) dt dx \\
 &= \frac{k}{8} \int_{x=0}^2 x^2 (4-x^2) \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} dx = \frac{k}{8} \int_0^2 x^2 (4-x^2) \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) dx \\
 &= \frac{k\pi}{16} \int_0^2 x^2 (4-x^2) dx = \frac{k\pi}{16} \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\
 &= \frac{k\pi}{16} \left(4 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{k\pi}{16} \left(4 \cdot \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{k\pi}{16} \left(\frac{20 \cdot 8 - 96}{15} \right) \\
 &= \frac{k\pi}{16} \left(\frac{64}{15} \right) = \frac{4k\pi}{15} \Rightarrow \frac{M}{8} = \frac{4k\pi}{15} \Rightarrow M = \frac{32k\pi}{15}
 \end{aligned}$$

4- $x+y=1$, $x+y=4$, $y=0$, $x=0$

8.5.1996/Garsamba

doğrularıyla sınırlanmış bölge R olduğuna göre,

$\iint_R \frac{dx dy}{x+y}$ integralini,

a) Doğrudan doğruya

b) $\begin{cases} x=u-v \\ y=u \end{cases}$ dönüşümünü yaparak hesaplayınız.

5- $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x^2+y^2 \leq a^2\}$ ise $\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy = ?$
 $\{x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta\}$

6- $R = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16\}$

eğrileri $x \geq 0, y \geq 0$ arasında kalan bölge olduğuna göre,

$$\iint_R xy \, dy \, dx = ?$$

7- $\rho = 2R \cos \theta$, $\rho = 3R \cos \theta$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin alanını iki katlı integralle hesaplayın.

8- $\rho = 4 \sin \theta$ nin içinde, $\rho = 2$ eğrisinin dışında kalan alanı iki katlı integralle bulunuz.

9- $\rho = \sin 3\theta$ (Üç yapraklı gül) eğrisinin sınırladığı alanı bulunuz.

10- $\rho = a(1 + \cos \theta)$ kardioidinin içinde, $\rho = a$ çemberinin dışında kalan alanı bulunuz.

11- $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ lemniskatının alanını bulunuz.

12- $W = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z=1\}$ olduğuna göre $\iiint_W \frac{dx \, dy \, dz}{y+z}$ integralini,

a) doğrudan doğruya,

b) $\begin{cases} x = u(1-w) \\ y = uw(1-w) \\ z = uw \end{cases}$ dönüşümüyle hesaplayınız.

13- $W = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ise aşağıdaki integralleri,

$x = au, y = bw, z = cw$ dönüşümlerini yaparak hesaplayınız.

i- $\iiint_W \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz$ ii- $\iiint_W (x^2 + y^2) dx \, dy \, dz$

14- $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1)$ yüzeylerinin sınırladığı bölgenin hacmini bulunuz.

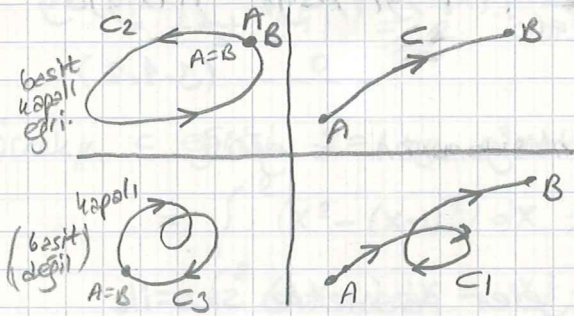
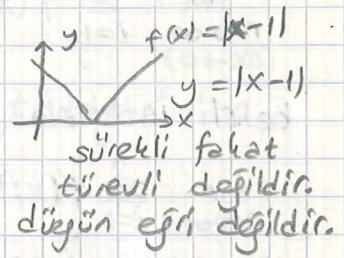
15- $r^2 + z^2 = a^2$ küresinin $\theta = -\frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{4}$ düzlemleri arasında kalan kısmının kütle merkezini bulunuz.

16 - $\alpha = \frac{\pi}{6}$ konisinin, $\rho = 4$ küresi içinde kalan $z \geq 0$ kısmının hacmini bulunuz.

Düzlemde Eğrisel İntegraller

Tanım: xy -düzleminde bir C eğrisi $x = \alpha(t)$, $y = \psi(t)$ ($h \leq t \leq k$) biçiminde verilsin. x, y fonksiyonları sürekli ve türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Böyle bir C eğrisine düzgün eğri denir. (sürekli ve türevlenebilen)

Böyle bir C eğrisi aynı zamanda yönlendirilebilen bir eğridir.



Eğer A noktası $[\alpha(h), \psi(h)]$ ve B noktası $[\alpha(k), \psi(k)]$ ile gösterilirse, t değişimi ile A noktasının B'ye doğru hareketi ile eğri çizilir. Bu eğri bazen C_1 eğrisi gibi kendi kendini keser. Eğer eğrinin başlangıç ve bitim noktaları aynı ise (C_2 de olduğu gibi) böyle eğrilere kapalı eğri denir.

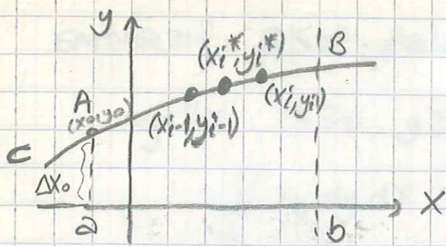
Eğer bir eğri kapalı ve kendi kendini kesmiyorsa, bu eğriye basit kapalı eğri denir.

$$\text{Bir } C \text{ eğrisi üzerinde; } \int_C f(x,y) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \quad (3.1.1)$$

$$\int_C f(x,y) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \quad (3.1.1.)$$

ile tanımlı integrali yorumlamaya çalışalım.

Verilen C eğrisi düzgün bir eğri olsun. $a \leq x \leq b$ aralığında, bu eğriyi, n -tane alt aralıklara ayıralım.



Her aralık için aşağıdaki toplamı oluşturalım.

$$f(x_0, y_0) \Delta x_0 + f(x_1, y_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i^* + \dots + f(x_n, y_n) \Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i = \int_C f(x, y) dx$$

belirli integrale göre böyle yazılır. Buna eğrisel integral denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i = \int_C f(x, y) dy$$

----- (3.1.2)

Bu (3.1.2) ifadesine, $f(x, y)$ fonksiyonunun C eğrisi üzerindeki eğrisel integrali denir.

Eğri üzerindeki noktalara karşı gelen parametre sıra ile $h \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = k$ olsun.

Δx_i 'ye $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ karşı gelir. Ve

$f(x_i^*, y_i^*) = f(x_i^*(t), y_i^*(t))$ karşı gelir.

Eğer, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ise

$$\int_C f(x, y) dx = \int_{t=h}^k f(x(t), y(t)) \varphi'(t) dt \quad \{x' \text{ e göre} \}$$

$$= \int_{t=h}^k f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

Veya, $\int_C f(x, y) dy = \int_{t=h}^k f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$ dir. $\{y' \text{ ye göre} \}$

Böyle bir integral, parametrenin seçimine tâbi değildir.

Özellikleri :

1- Eğer $f(x, y)$, C üzerinde sürekli ise

$\int_C f(x, y) dx$ ve $\int_C f(x, y) dy$ integralleri vardır.

2- Eğer $f(x,y)$, C üzerinde sürekli ise,

$$\int_C f(x,y) dx = \int_{t=h}^k f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\int_C f(x,y) dy = \int_{t=h}^k f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt \quad \text{integralleri vardır.}$$

Örnek // C eğrisi, $x=1+t^2$, $y=t^2$ $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere,

$$\int_C (x^2 - y^2) dx = ? \quad \{x=1+y\}$$

$$\int_C (x^2 - y^2) dx = \int_0^1 [(1+t^2)^2 - (t^2)^2] 2t dt$$

$$= \int_0^1 (1 + 2t^2 + t^4 - t^4) 2t dt = \int_0^1 (2t + 4t^3) dt$$

$$= t^2 + t^4 \Big|_0^1 = 2 \quad \text{olur. Aynı sonucu ;}$$

Örnek // C eğrisi $x=1+y$ olmak üzere $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (x^2 - y^2) dx = ?$

$$= \int_1^2 (x^2 - (x-1)^2) dx$$

$$= \int_1^2 (2x - 1) dx = x^2 - x \Big|_1^2 = 2 - 0 = 2 \quad \text{aynı sonuç bulunur. //$$

Uygulamada $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları, bir C eğrisi üzerinde sürekli olmak koşulu ile,

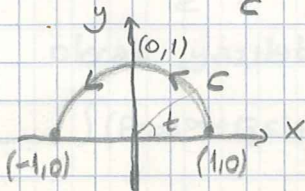
$$\int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

eğrisel integrali oldukça sık kullanılmaktadır. Eğrisel integral alınırken bazı denklemlerle, eğrinin başlangıç ve bitim noktalarını belirlenmek gerekir.

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy \quad \text{gibi.}$$

Örnek // C eğrisi $y = \sqrt{1-x^2}$ çemberi olmak üzere, bu çember

$$\text{üzerinde, } \int_C (x^3 - y^3) dx = ? \quad \int_C (x^3 - y^3) dy = ?$$



$$\int_C (x^3 - y^3) dx = \int_{(1,0)}^{(-1,0)} (x^3 - y^3) dx$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

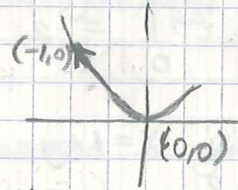
$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} (\cos^2 t - \sin^3 t) (-\sin t dt) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left[-\cos^3 t \sin t + \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \right] dt \\
&= \frac{1}{4} \cos^4 t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 - 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}}{4} dt \\
&= \frac{1}{4} \cos^4 t + \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{t}{8} + \frac{1}{32} \sin 4t \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8} //
\end{aligned}$$

Ve,

$$\int_C f(x,y) dy = \int_0^{\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t) \cos t dt = \frac{3\pi}{8} \text{ olur.}$$

Örnek // C eğrisi, $y = x^2$ parabolünün $(0,0)$ dan $(-1,1)$ 'e kadar olan yayı olsun. $\int_C y^2 x dx + x^2 y dy = ?$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{-1} x^4 x dx + x^2 x^2 2x dx \\
&= \int_0^{-1} (x^5 + 2x^5) dx = 3 \int_0^{-1} x^5 dx = \frac{1}{2} //
\end{aligned}$$



10.5.96/Cuma

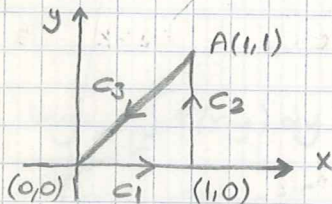
Eğer eğri kapalı bir eğri ise başlangıç ve bitim noktalarını belirlemek gerekmez. Ancak eğrinin yönünü belirtmek zorunludur.

$$\oint P dx + Q dy \quad \text{veya} \quad \oint P dx + Q dy$$

ile gösterilir.

Örnek // C eğrisi aşağıdakilerden üçgen olmak üzere pozitif yönde

$$\oint y^2 dx + x^2 dy = ?$$



C_1 eğrisi için : $y=0 \Rightarrow dy=0$
 $x=0$ dan $x=1$ 'e kadar değişir.

$$\int_{C_1} 0 dx + 1 \cdot 0 = 0$$

C_2 eğrisi için $x=1, dx=0$
 $y=0$ dan 1 'e kadar değişir.

$$\int_{C_2} y^2 \cdot 0 + 1 \cdot dy = \int_0^1 dy = 1$$

C_3 eğrisi için :

$$y=x \Rightarrow dy=dx$$

$$\int_{c_3} y^2 dx + x^2 dy = \int_1^0 x^2 dx + x^2 dx = 2 \int_1^0 x^2 dx = -\frac{2}{3}$$

$$\oint y^2 dx + x^2 dy = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} = 0 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} //$$

Yay uzunluğuna göre eğrisel integral ve temel özellikleri :

Pargalı düzğün ya da düzğün c eğrisini S yay uzunluğu $h \leq t \leq k$ olmak üzere $S = \int_h^k \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ parametrik ifadesi ile tanımlanır.

$$(S = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx \text{ veya } S = \int_c^d \sqrt{1+x'^2} dy \text{ yazılabilir.})$$

Böylece t parametresine göre S yay uzunluğu ; S, (0) dan c nin boyu den L (yayın tüm uzunluğu)'ye kadar bulunur.

$$\int_c f(x,y) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta S \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

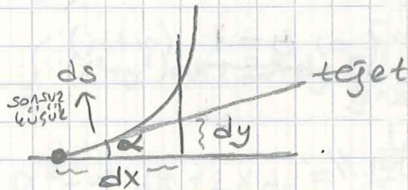
$$\int_c f(x,y) ds = \int_{t=h}^k f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{yay par.} \\ \text{cinsinden} \end{array} \right\}$$

$$\int_c f(x,y) ds = \int_0^L f(x(s), y(s)) ds \quad \text{kendisi cinsinden}$$

$$\int_c f(x,y) ds = \int_{x=a}^b f(x, y(x)) \sqrt{1+y'^2} dx \quad x \text{ cinsinden}$$

$$\int_c f(x,y) ds = \int_{y=c}^d f(x(y), y) \sqrt{1+x'^2} dy \quad y \text{ cinsinden olur.}$$

Tekrar $\int P dx + Q dy$ integrale dönelim.



Sekildeki α , tegetin x eksenine yaptığı açıdır.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

$$\int_c P dx + Q dy = \int_c (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds$$

olarak yazılabilir.

$$\int_c (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds = \int_c \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_c P dx + Q dy \quad \text{olur.}$$

Eğrisel İntegralin Özellikleri :

- i- $\int_C Pdx + Qdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy$ (c düzgrün eğri değilse)
- ii- $\int_C Pdx + Qdy = - \int_{C'} Pdx + Qdy$ (C' , C nin ters yönüdür.)
- iii- $\int_C P_1dx + Q_1dy + \int_C P_2dx + Q_2dy = \int_C (P_1+P_2)dx + (Q_1+Q_2)dy$
- iv- $k \int_C Pdx + Qdy = \int_C (kP)dx + (kQ)dy$
- v- $\int_C ds = L$ (eğri boyunca, yay diferansiyelinin integrali, eğrinin uzunluğunu verir.)
- vi- Eğer C üzerinde $|f(x,y)| \leq M$ ise
 $|f(x,y)ds| \leq M.L$

dir.

- Alıştırırmalar -

1- $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx + (y-x)dy$ integralini aşağıdaki eğriler boyunca bulun.

a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

b) $y^2 = x$

c) $\begin{cases} x = 2t^2 + t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

d) $(1,1), (1,2), (4,2)$ noktalarını birleştiren doğru boyunca.

- Çözümler -

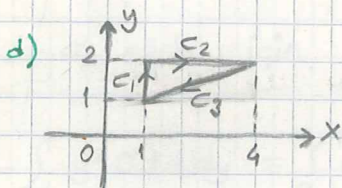
1- a) $\int_{x=1}^4 \left[x + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right) \right] dx + \left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right) - x \right] \frac{dx}{3} = 11 //$

b) $\int_{x=1}^4 (x + x^{1/2}) dx + (x^{1/2} - x) \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \int_1^4 \left(x + x^{1/2} + \frac{1}{2} - x^{1/2} \right) dx = \frac{34}{3} //$ $\begin{cases} y^2 = x \\ y = \sqrt{x} \\ dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2t^2 + t + 1 \\ 1 = t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0, t_2 = -1/2 \\ t_{1,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{t = 0} \text{ (ortak)}$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2t^2 + t + 1 \\ 2 = t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1, t_2 = -3/2 \\ t_1 = 1, t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{t = 1} \text{ (ortak)}$

$\int_{t=0}^1 (2t^2 + t + 1)(4t + 1) dt + (t^2 + 1)(2t) dt = \frac{31}{3} //$



d) $\int_{C_1} (x+y)dx + (y-x)dy = \int_{y=1}^2 (1+y) \cdot 0 + (y-1) dy = \frac{1}{2} //$

$\int_{C_2} (x+y)dx + (y-x)dy = \int_{x=1}^4 (x+2)dx + (2-x) \cdot 0 = \frac{27}{2} //$

$$\int_{C_3} (x+y)dx + (y-x)dy = \int_{x=1}^4 \left(x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)dx + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - x\right) \frac{1}{3}dx$$

$$\left\{ (y-y_1) = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} (x-x_1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right\}$$

$$= \int_1^4 \left(x + \frac{x}{3} + \frac{2}{3} + \frac{x}{9} + \frac{2}{9} - \frac{x}{3}\right)dx$$

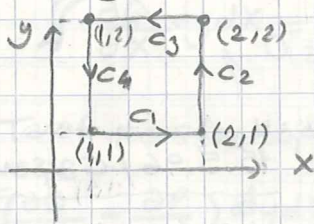
$$= \int_1^4 \left(\frac{10x}{9} + \frac{8}{9}\right)dx = \frac{5x^2}{9} + \frac{8x}{9} \Big|_1^4 = \frac{5 \cdot 256}{9} + \frac{32}{9} - \frac{13}{9}$$

$$= \frac{5 \cdot 256 + 19}{9}$$

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} \dots \text{ olur. } //$$

2- C eğrisi, köpelerinin koordinatları (1,1), (1,2), (2,2), (2,1) olan kare bölüğüne göre,

a) $\int_C (x^2+y^2)dx + 2x dy = ?$ b) $\int_C (x^2+y)dx + x dy = ?$



Çözümler

a) $\int_{C_1} (x^2+y^2)dx + 2x dy = \int_{x=1}^2 (x^2+1)dx + 2x \cdot 0 = \frac{x^3}{3} + x \Big|_1^2 = \frac{10}{3}$

$$\int_{C_2} (x^2+y^2)dx + 2x dy = \int_{y=1}^2 (4+y^2) \cdot 0 + 2 \cdot 2 dy = 4y \Big|_1^2 = 4$$

$$\int_{C_3} (x^2+y^2)dx + 2x dy = \int_{x=2}^1 (x^2+4)dx + 2x \cdot 0 = \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_2^1 = -\frac{19}{3}$$

$$\int_{C_4} (x^2+y^2)dx + 2x dy = \int_{y=2}^1 (1+y^2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 dy = 2y \Big|_2^1 = -2$$

$$\Rightarrow \int_C (x^2+y^2)dx + 2x dy = \frac{10}{3} + 4 - \frac{19}{3} - 2 = -3 + 2 = -1 //$$

3- C eğrisi $y^2 = x$ $|y| = 2x-1$ kapalı eğri bölüğüne göre

$$\int_C (x+y^2)dx + x^2y dy = ?$$

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dy dx &= \iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy dx = \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy dx \\
 &= \int_{x=a}^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx \\
 &= - \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_b^a P(x, f_2(x)) dx
 \end{aligned}$$

$$- \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, f_1(x)) dx + \int_b^a P(x, f_2(x)) dx \quad (3.3.2)$$

R bölgesi $c \leq y \leq d$ ve $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$

bişiminde ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial f}{\partial x} dy dx &= \iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dy dx = \int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\
 &= \int_{y=c}^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)] dy
 \end{aligned}$$

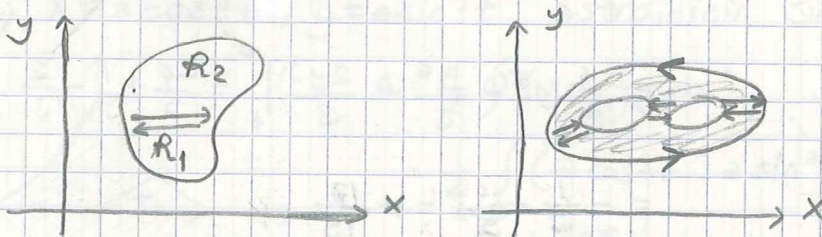
$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dy dx = \int_c^d Q(g_2(y), y) dy + \int_d^c Q(g_1(y), y) dy \quad (3.3.3)$$

Taraf tarafa toplarsak,

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = \oint P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

elde edilir. Bu teoremin ispatında, kapalı C eğrisinin, eksenlere paralel doğrularla iki noktada kesiildiği kabul edilmiştir.

Eğer böyle değilse R bölgesi $R_1, R_2, \dots$ bölgelere ayrılacak yukarıdaki durum oluşturulur.



$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx$$

Örnek // C eğrisi, $x^2 + y^2 = 1$ ise $\oint 4xy^3 dx + 6x^2y^2 dy = ?$
 $P = 4xy^3$ $Q = 6x^2y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\oint_C 4xy^3 dx + 6x^2y^2 dy = \iint_R [(12xy^2) - (12xy^2)] dy dx = 0$$

örnek // C eğrisi $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi ise,

$$\oint_C (2x-y) dx + (x+3y) dy = ?$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

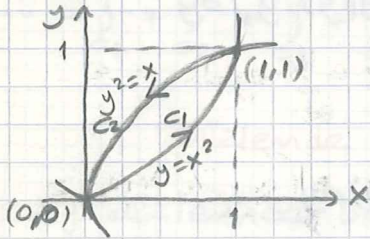
$$\oint_C (2x-y) dx + (x+3y) dy = \iint_R (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2\pi ab$$

elipsin alanını verir. $a=2$ $b=1 \Rightarrow 2\pi \cdot 2 \cdot 1 = 4\pi$ dir.

örnek // $y=x^2$ ve $y^2=x$ ile sınırlı bölgede, aşağıdaki integrali hesaplayın.

$$\oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy = ?$$

yol //



$$\int_{C_1} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$$

$$= \int_{C_1} (2xx^2 - x^2) dx + (x + x^4) 2x dx$$

$$= \int_{x=0}^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx$$

$$= \left. \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\int_{C_2} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy = \int_{y=1}^0 (2y^2y - y^4) 2y dy + (y^2 + y^2) dy$$

$$= \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy$$

$$= \left(\frac{4}{5} y^5 - \frac{y^6}{3} - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -\frac{4}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{17}{15}$$

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30} //$$

$$\text{yol} // \oint_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy = \iint_R (1 - 2x) dy dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx \\
&= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{4}{5} x^{5/2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30} //
\end{aligned}$$

0 halde Green Teoremi gerçekleşmiş olur.

Green Teoreminin Alan Hesaplarında Kullanılması :

0 bir bölge, C de bu bölgede basit kapalı bir eğri olsun.

C'nin sınırladığı R bölgesinin alanı A olsun. Green teoremini

$$\oint_C x dy \text{ ve } -\oint_C y dx$$

integrallerine uygulayalım.

$$\oint_C x dy = \oint_C 0 dx + x dy = \iint_R (1-0) dy dx = \iint_R dy dx = A$$

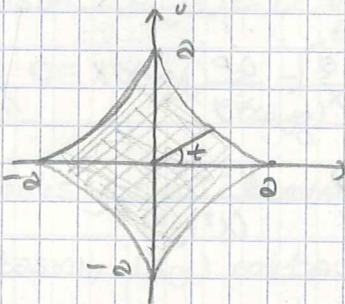
$$-\oint_C y dx = -\oint_C y dx + 0 dy = \iint_R (0-1) dy dx = \iint_R dy dx = A$$

toplamını alırsak,

$$\oint_C x dy - y dx = 2 \iint_R dy dx = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

bulunur.

Örnek // $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidinin sınırladığı alanı bulun.



$$A = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (2a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \cdot \sin t) dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right)^2 dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left| t - \frac{1}{4} \sin 4t \right|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{8} //$$

Örnek // c eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ise ,

$$\oint_C [\sin(xy) + xy \cos(xy)] dx + x^2 \cos(xy) dy = ?$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx =$$

$$= \iint_R [(2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)) - (x \cos xy + y \cos xy - xy^2 \sin xy)] dy dx$$

$$= \iint_R 0 dx dy = 0 //$$

Örnek // $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin alanını bulunuz.

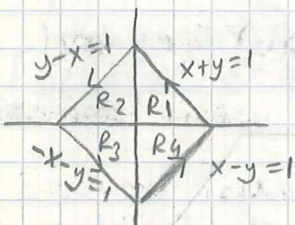
$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad A = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + b \sin t a \sin t) dt$$

$$A = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab //$$

Örnek // c eğrisi $|x| + |y| = 1$ karesi olduğuna göre

$$\oint_C y^3 dx - x^3 dy = \iint_R (-3x^2 - 3y^2) dy dx$$



$$= \iint_{R_1} + \iint_{R_2} + \iint_{R_3} + \iint_{R_4} //$$

Örnek // c eğrisi $x = 2 + \cos \theta$, $y = \sin \theta$ ise

$$\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = 0 //$$

$$P = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ çemberidir.}$$

$$2. \text{ yol : } \oint \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{((2+\cos \theta) \sin \theta d\theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta}{(2+\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = 0 //$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = t \text{ dönüşümüyle.}$$

$$= \pi - \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos \theta}$$

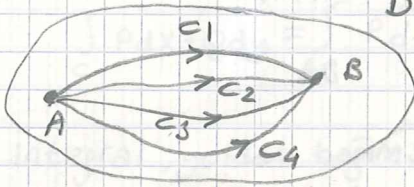
$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dt = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Yoldan Bağımsızlık, Basit Bağlantılı Bölgeler

$P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları Xy -düzleminin bir D bölgesinde sürekli olsun. Eğer D bölgesini A başlayış ve B bitim noktaları için ;

$$\int_A^B Pdx + Qdy$$

eğrisel integrali A 'yı B 'ye birleştiren her eğri için aynı ise yani her eğri için, eğrisel integralin değerleri eşitse, bu eğrisel integral, yoldan bağımsızdır denir. Bu durumda , integralin değeri, yalnız A başlayış ve B bitim noktasına bağlıdır.



$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_{C_1} = \int_{C_2} = \dots$$

olmasıyla ,

$$\int_A^B Pdx + Qdy \text{ yoldan bağımsızdır.}$$

Teorem 3.5.1. Eğer $\int Pdx + Qdy$ eğrisel integrali, D deki yoldan bağımsız ise bu durumda $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ olacak şekilde D de tanımlı bir $F(x,y)$ fonksiyonu vardır.

Tersine, eğer $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ ise yani böyle bir $F(x,y)$ varsa, $\int Pdx + Qdy$ integrali yoldan bağımsızdır.

İspat // kabul edelim ki, $\int Pdx + Qdy$ integrali yoldan bağımsız

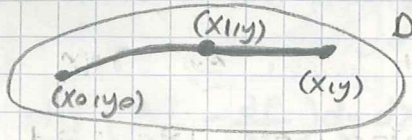
olsun. $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere ;

$$F(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradaki integral, (x_0, y_0) sabit noktasını, (x,y) noktasına birleştiren herhangi bir eğri boyunca alınmıştır. Maden ki , integral yoldan bağımsızdır , (x_0, y_0) sabit olduğundan , integral sadece (x,y) bitim noktasına bağlı olur. Ve bir $F(x,y)$ fonksiyonu tanımlanır.

$x_1 \neq x_2$ ve (x_1, y) 'yi (x, y) ye birleştiren doğru parçasını

D'de olacak şekilde seçelim. integral, yoldan bağımsız



olduğu için,

$$F(x_1, y) = \int_{(x_1, y_0)}^{(x_1, y)} P dx + Q dy + \int_{(x_1, y)}^{(x_2, y)} P dx + Q dy$$

yazılabilir. Sağ tarafta, ikinci integralde y sabit kabul edilirse, ikinci integral bir doğru boyunca integral olur.

Böylece $y = \text{sabit} \Rightarrow dy = 0$ olduğundan,

$$F(x_1, y) = \text{sabit} + \int_{x_1}^x P(x, y) dx$$

olur. x 'i, t ile değiştirebilirsek,

$$F(x_1, y) = \text{sabit} + \int_{x_1}^x P(t, y) dt$$

olur. Buradan da,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

olur. Benzer şekilde;

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

olur.

Tersine, $F(x, y)$ fonksiyonu için, D'de (3.5.1) teoremin koşulları

sağlanmış olsun. O halde t parametresine göre

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = \int_{t=t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = F(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1)$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

dir. Başka bir deyişle,

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_A^B dF = F(B) - F(A)$$

dir. Yani integral, yoldan bağımsızdır. Başlangıç ve bitim noktalarına bağlıdır.

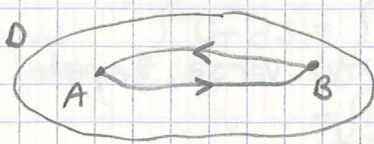
Teorem 3.5.2. Eğer $\int Pdx + Qdy$ integrali yoldan bağımsız ise

D 'deki her basit kapalı eğri boyunca ;

$$\oint Pdx + Qdy = 0$$

olur. Tersine olarak D 'deki her basit kapalı eğri için , bundan önceki teoremin şartları sağlanıyorsa $\int Pdx + Qdy$ yoldan bağımsızdır.

İspat // Önce $\int Pdx + Qdy$ nin yoldan bağımsız olduğunu kabul edelim. Ve C de basit kapalı eğri olsun.



C eğrisi, $C = \overline{AB} \cup \overline{BA}$

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BA} Pdx + Qdy$$

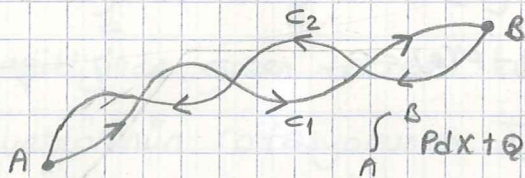
İntegral, yoldan bağımsız olduğu için ,

$$= \int_A^B Pdx + Qdy = \int_B^A Pdx + Qdy$$

$$= \int_A^B Pdx + Qdy - \int_A^B Pdx + Qdy = 0$$

olur. Böylece ,

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0 \text{ olur.}$$



$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_{C1} Pdx + Qdy + \int_{C2} Pdx + Qdy = 0$$

Teorem 3.5.3. $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$, D bölgesinde sürekli ve kısmi

türevlere sahip iki fonksiyon olsun. $\int Pdx + Qdy$ integrali,

D bölgesinde yoldan bağımsız ise, D 'de

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

dir. (Bu teoremin tersi, yani bu eşitliğin var olması için integralin yoldan bağımsızlığı olmayabilir. Tan dif. ise yola bağlı değildir.)

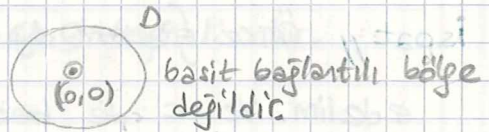
İspat,, Teorem (3.5.1)'den $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ olduğundan,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

olup, $\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ dir.

Örnek,, $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ şeklinde tanımlanan P ve Q fonksiyonları, $D = \mathbb{R} - \{0,0\}$ bölgesinde sürekli ve kısmî türevlere sahip fonksiyonlardır.

$$P_y = Q_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

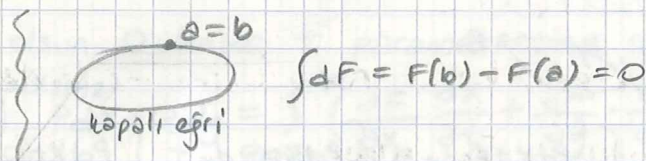


$dF = Pdx + Qdy$ olacak şekilde bir $F(x,y)$ varsa, kapalı bir C eğrisi üzerinde $\int_C Pdx + Qdy = 0$ olurdu.

Halbuki C eğrisi, $\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ çemberini alırsak,

$$\begin{aligned} \int_C Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} a \cos t \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

olur. Şu halde $Pdx + Qdy$ ifadesi D bölgesinde hiçbir fonksiyonun tam diferansiyeli değildir.



Vektör İntegralleri Olarak Eğrisel İntegral

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \quad \text{olmak üzere, } P(x,y) \text{ ve } Q(x,y)$$

fonksiyonlarını bileşen kabul eden;

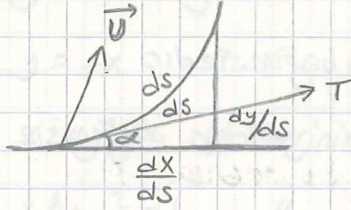
$$\vec{U}(x,y) = P(x,y) \vec{e}_1 + Q(x,y) \vec{e}_2$$

vektörünün eğrisel integrali,

$$\int_C \vec{U} \cdot d\vec{S} = \int_C Pdx + Qdy \quad \text{--- (3.7.1)}$$

olarak tanımlanır.

Burada U_T , c eğrisi boyunca tanımlı bulunan $\vec{U}$ nun, T birim teğeti üzerindeki, S nin artma yönündeki bileşenidir.



Şekilde görüldüğü gibi, $\frac{dx}{ds}$ ve $\frac{dy}{ds}$

T vektörünün bileşenleridir.

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{e}_2 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2 \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \|\vec{T}\| = 1 \text{ dir. O halde } T \text{ birim vektördür.}$$

$$U_T = \langle \vec{U}, \vec{T} \rangle = p \cos \alpha + q \sin \alpha$$

$$\text{-ve } \int_c U_T ds = \int_c (p \cos \alpha + q \sin \alpha) ds$$

$$= \int_c \left(p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds} \right) ds$$

$$= \int_c p dx + q dy$$

elde edilir.

$$\vec{U}(x,y) = p(x,y) \vec{e}_1 + q(x,y) \vec{e}_2 \text{ bir kuvvet alanı ise}$$

$$\int_c U_T ds = \int_c p dx + q dy \text{ eğrisel integrali işi gösterir.}$$

Bu işe c eğrisi üzerinde hareket eden bir parçacığın, eğrinin başlangıcından bitimine kadar yaptığı işi verir. Eğer,

$$\oint_c U_T ds = \oint_c p dx + q dy$$

eşitliğinde green teoreni kullanılırsa, $\vec{U}(x,y) = p(x,y) \vec{e}_1 + q(x,y) \vec{e}_2$ vektörünün rotasyonunun $\vec{e}_3$ bileşeninin,

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

olduğunu görürüz. O halde

$$\oint_c U_T ds = \iint_R \text{rot } \vec{U} \vec{e}_3 dy dx$$

olur ki, buna Stokes teoreminin özel hali denir. Eğer,

$p = \frac{\partial F}{\partial x}$ ve $q = \frac{\partial F}{\partial y}$ ise, $\int p dx + q dy$ yoldan bağımsız olacaktır

$$\{ p(x,y) \vec{e}_1 + q(x,y) \vec{e}_2 = \text{grad } F \}$$

olur.

$$\text{Grad } \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 = P(x,y) \vec{e}_1 + Q(x,y) \vec{e}_2$$

ya da, $\vec{U} = \text{grad } \vec{F}$ ise

$$\oint_C U_T ds = \oint_C P dx + Q dy \quad \text{yoldan bağımsızdır.}$$

Yine Teorem (3.5.3)'e göre, $\int P dx + Q dy$ yoldan bağımsız ise

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{dir. O halde,}$$

$$\vec{U} = P \vec{e}_1 + Q \vec{e}_2 = \text{grad } \vec{F}$$

$$\text{rot } \vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{e}_3 = 0$$

olur. O halde $\boxed{\text{rot}(\text{Grad } \vec{F}) = 0}$ dir.

$\text{rot } \vec{U} = 0$ ise $\vec{U} = \text{Grad } \vec{F}$ olur. Bu ise D bölgesinin basit bağlantılı olduğunu gösterir.

Alıştırılmalar (Eğrisel İntegraller) 22.5.96/Çarpamba

1- C eğrisi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin çevresi olduğuna göre

$$\int_C (x+y) dx + (x-y) dy = ?$$

Gözüm // $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy dx = 0$
(1-1) dy dx

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_C (x+y) dx + (x-y) dy &= \int_0^{2\pi} (a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) dt + (a \cos t - b \sin t)(b \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos t \sin t - ab \sin^2 t + ab \cos^2 t - b^2 \cos t \sin t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cos^2 t + \frac{ab}{2} \sin 2t + \frac{b^2}{2} \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} \\ &= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right) - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

2- $\int_C (x^2 + y^2) ds$, $(ds = \sqrt{1+y'^2} dx)$ integralini,

a) $y=2x$ doğrusunun $(0,0)$ noktasından $(1,2)$ noktasına kadar,

b) $y=-x$ " $(1,-1)$ " $(2,-2)$ " " ,

c) $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $(2,0)$ " $(0,2)$ " " ,

d) $x^2 + y^2 = 1$ " $(1,0)$ " $(0,1)$ " " ,

hesaplayın.

Çözüm // c) $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

$$\int_C (x^2 + y^2) ds = \int_2^0 4 \sqrt{1+y'^2} = 4 \int_2^0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$$= 4 \int_2^0 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} dx = 8 \int_2^0 \frac{dx}{y} = 8 \int_2^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= 8 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} \Big|_2^0 = 8(\operatorname{Arcsin} 0 - \operatorname{Arcsin}(1)) = 8(0 - \frac{\pi}{2}) = -4\pi //$$

3- C eğrisi, $1 \leq x \leq 2$ ve $1 \leq y \leq 1+x^2$ ile sınırlı bölgenin

çevresi olduğuna göre, $\int_C y^2 dx - xy dy = ?$



$$y=1 \Rightarrow dy=0$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$\int_1^2 dx - 0 = 2 - 1 = 1 \quad \text{AB nin integralidir}$$

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} //$$

4- Aşağıdaki eğrisel integralleri hesaplayın.

a) $\int_C 2y dx - 3x dy$ c; $x=1-t, y=2+3t$ $0 \leq t \leq 1$

b) $\int_C 5y dx + 3x dy$ c; $x=3+2t, y=5-t$ $0 \leq t \leq 2$

c) $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xy dx - y^2 dy$ c; $y=x^2$ parabolü,

d) $\int_{(3,-1)}^{(1,-2)} \frac{y}{x} dx - \frac{x}{y} dy$ c; $y=2-x$ doğrusu,

e) $\int_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ c; $x=\cos t, y=\sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$f) \int_C 2y dx + 3dy, \quad c: \begin{cases} x = \sin t + \sin 3t \\ y = \cos t - \cos 3t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Gözüm, f) $\int_C 2y dx + 3dy = \int_0^{2\pi} 2(\cos t - \cos 3t)(\cos t + 3\cos 3t) dt + 3(-\sin t + 3\sin 3t) dt$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t + 6\cos t \cos 3t - 2\cos t \cos 3t - 6\cos^2 3t - 3\sin t + 9\sin 3t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t + 4\cos t \cos 3t - 6\cos^2 3t - 3\sin t + 9\sin 3t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t + 4\cos t \cos 3t - 3(1 + \cos 6t) - 3\sin t + 9\sin 3t) dt$$

$$= t + \frac{1}{2} \sin 2t - 3t - \frac{1}{2} \sin 6t + 3\cos t - 3\cos 3t + \int 4\cos t (4\cos^2 t - 3\cos t) dt$$

$$= -4\pi + \int_0^{2\pi} (16\cos^4 t - 12\cos^3 t) dt$$

$$\begin{cases} \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \cos(t \pm 2t) \text{ den.} \end{cases}$$

★★

$$\int \cos^m x dx = \int \underbrace{\cos^{m-1} x}_u \underbrace{\cos x dx}_{dv}$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x + \int (m-1) \cos^{m-2} x \sin^2 x dx$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-1} x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x dx - (m-1) \int \cos^m x dx$$

$$\int \cos^m x dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$$

$$I_m = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

$$\cos^5 x dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx$$

$$= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \left[\frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{5} \int \cos x dx \right]$$

$$= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + c //$$

$m \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır.

Negatif iadirgenme (yükseltgenme) yapalım.

m yerine $m+2$ yazalım.

$$I_{m+2} = \frac{1}{m+2} \cos^{m+1} x \sin x + \frac{m+1}{m+2} I_m$$

$$\Rightarrow I_M = \frac{M+2}{M+1} I_{M+2} - \frac{1}{M+1} \cos^{M+1} x \sin x$$

$$\Rightarrow I_M = -\frac{1}{M+1} \cos^{M+1} x \sin x + \frac{M+2}{M+1} I_{M+2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \cos^{-5} x dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos^{-4} x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^{-3} x dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos^{-4} x \sin x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \cos^{-2} x \sin x + \frac{1}{2} \int \cos^{-1} x dx \right]$$

$$= \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \tan x|$$

5-

$\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ kuvvetinin etkisi altında

$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) denklemi ile verilen

C , dairesel helisi üzerinde yukarıya doğru bir parçacık hareket etmektedir. Yapılan işi hesaplayınız.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

Fiziksel olarak iş,

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t=t_1}^{t_2} \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} (-\sin t \cdot t \vec{i} + \cos t \cdot t \vec{j} + \cos t \sin t \vec{k}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}) dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}$$

$$W = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cdot t + \cos^2 t \cdot t + \cos t \sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \left. \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2t \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 //$$

6- $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ fonksiyonunun aşağıdaki C eğrileri boyunca integrallerini bulun.

a) C ; $\vec{r}(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$

b) C ; $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $c: \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

7- $g = g(\theta)$ ve $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ olmak üzere, $f(x,y)$

fonksiyonunun verilen bir eğri boyunca alınan integralinin kutupsal koordinatlardaki ifadesi,

$$\int_c f(x,y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(g \cos \theta, g \sin \theta) \sqrt{g^2 + \left(\frac{dg}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta$$

kutupsal koordinatlarda
yay uzunluğu

olduğunu gösteriniz.

8- $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ integralinin yoldan bağımsız olduğunu göstererek değerini bulunuz.

(Yoldan bağımsızlık: Herhangi yoldan gidilirse gidilsin sonuç değişmezse.)

$\downarrow$
 $P_y = Q_x$ $P_y = 2y = Q_x$ olduğundan yoldan bağımsızdır.

$$\int_c P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy dx = \iint_R (2y - 2y) dy dx = 0 \text{ dir.}$$

Green teoreminden

9- Aşağıdaki integrallerin yoldan bağımsız olup olmadıklarını araştırın.

a) $\int y \cos x dx + \sin x dy$

d) $\int \sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy$

b) $\int (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$

e) $\int (x^2 - y^2) dx - 2(x-1)y dy$

c) $\int (x - y^2) dx + 2xy dy$

a, d, e yoldan bağımsızdır.

10- C birim çember ise,

$$\int (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy = ? \quad (\text{Green teoremiyle})$$

11- Aşağıdaki integralleri Green teoremini kullanarak hesaplayın.

a) $\int a y dx + b x dy$ (C ; herhangi bir eğri)

b) $\int e^x \sin y dx - e^x \cos y dy$ C ; $A(0,0), B(1,0), C(1, \frac{\pi}{2}), D(0, \frac{\pi}{2})$ dikdörtgeni.

c) $\int_{(1,2)}^{(3,-2)} 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy = \int_{(1,2)}^{(3,-2)} d(x^2y^3) = -80$ olduğunu gösterin.

d) $\int_c \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_c d(\arctan \frac{y}{x})$ C ; başlangıcı kapsanmayan basit bağlantılı bölgenin çevresi.

e) $\int_c \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \int_c d(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) = \ln |r_B / r_A|$ " "

Yay Uzunluğu ve Yüzey Alanı

Analizden bilindiği gibi, $y=f(x)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığındaki yay uzunluğu ; $S = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx \dots (1)$

idi. Yine eğrimiz parametrik olarak verildiğinde, yani ;

$x=x(t), y=y(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$ için yay uzunluğu ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \dots (2)$$

olduğunu ve kutupsal olarak, $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ için, } S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

olarak yay uzunluğu bulunur.

(2) ifadesinde C eğrisi bir yay eğrisi olsun. Yani,

$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$ için,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \dots (3)$$

ifadesiyle yay uzunluğu bulunur.

Burada amacımız ; (1), (2) ve (3) den yararlanarak

üç boyutlu yüzeylerin alanlarını bulmaktır. Yüzey,

$z=f(x,y)$ biçiminde verilsin. S bölgesinin alanı ,

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \dots (4)$$

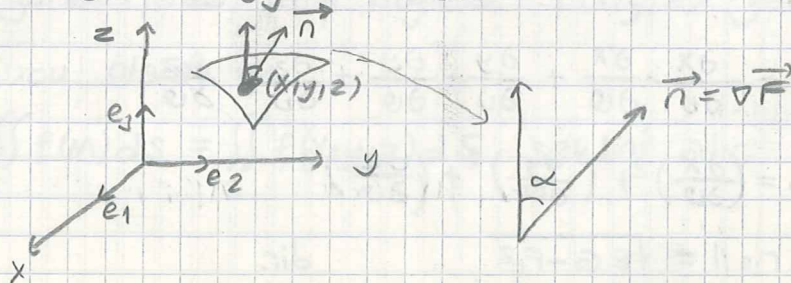
ile hesaplanır. Bu ifade, (1) ifadesiyle benzerdir.

Eğer S yüzeyinin denklemi $F(x,y,z)=0$ ise yüzeyin bir

(x,y,z) noktasındaki normali

$$\vec{n} = \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_3$$

dir.



$$\langle \nabla F, \vec{e}_3 \rangle = \|\nabla F\| \cdot \|\vec{e}_3\| \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sec \alpha = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} \quad \text{olur.}$$

Eğer $z = f(x, y)$ biçiminde verilmişse,

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) \quad \text{ve} \quad \left. \begin{array}{l} F_x = -z_x \\ F_y = -z_y \\ F_z = 1 \end{array} \right\} \text{olacağından,}$$

$$|\sec \alpha| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \quad \text{bulunur.}$$

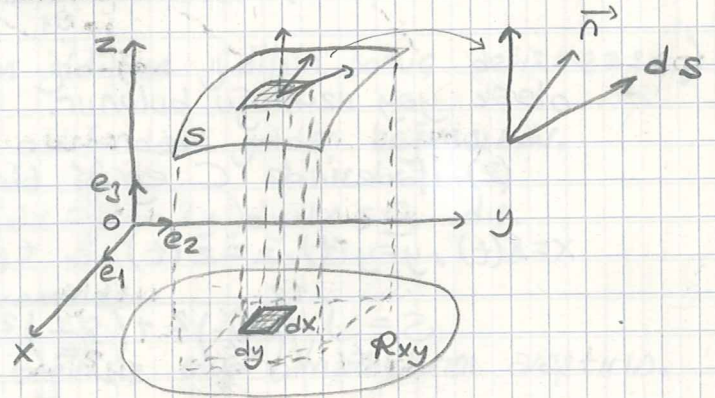
$$dx dy = dS \cos \alpha$$

$$\Rightarrow dS = \sec \alpha \cdot dx \cdot dy$$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

dur. Böylece alan

diferensiyeli bulunmuş olur.



Yüzey $z = f(x, y)$ ise S bölgesinin alanı,

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Yüzey; $X = X(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ şeklinde parametrik olarak verilmiş ise

$$S = \iint_{R_{uv}} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

ifadesiyle yüzey alanı hesaplanır. Burada E, G, F diferensiyel geometriden bilindiğine göre,

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

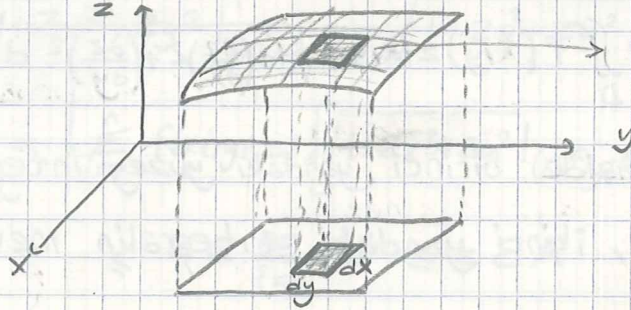
$$F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$\|r_u \wedge r_v\| = \sqrt{EG - F^2} \quad \text{dir.}$$

Yüzey İntegralleri

Tanım: Parçalı düzlemin bir L eğrisi tarafından sınırlanan düzlemin bir S yüzeyi verilsin. Yine f de S yüzeyi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. S yüzeyinin sınırları, parçalı düzlemin eğriler olan; $S_1, S_2, \dots, S_n$ gibi bölüntüsünü alalım.



Burada
Ne hacim, ne de
alanı buluruz.
Sadece yüzeyin
integralidir.

Şimdi S_i den M_i noktasını seçelim.

$$dx dy = ds \cos \alpha$$

$$ds = \sec \alpha dx dy$$

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

toplamını oluşturalım.

$$T = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i$$

olup, buna; $S_1, S_2, \dots, S_n$ bölüntüsü için f nin integral toplamı denir.

Tanım: S_i parçalarının çaplarının (eğrisel paralelkenarın köşegeni) maksimumu sıfıra giderken ($n \rightarrow \infty$ için) yukarıdaki toplamın limiti varsa bu limite f nin S yüzeyi üzerindeki yüzey integrali denir. Ve $\iint_S f(M) ds$ ile gösterilir.

Yüzey üzerinde değişen M noktası (x, y, z) koordinat sistemine göre ifade edilir. Böylece $f(x, y, z)$ yazılabilir.

Bunun sonucu olarak da,

$$\iint_S f(M) ds = \iint_S f(x, y, z) ds \text{ seklini alır.}$$

Yüzey İntegrallerinin Katlı İntegrallere İndirgenmesi

Teorem: D , kapalı ve sınırlı bir bölge, $S_f(x,y) \in D$ olmak üzere

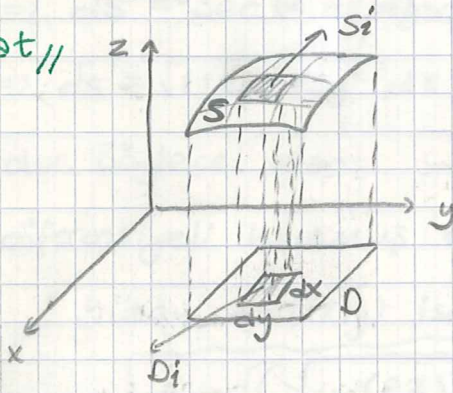
$z=z(x,y)$ denklemiyle verilmiş düzpün bir yüzey ve

$f(x,y,z)$ de S yüzeyi üzerinde tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu taktirde ,

$$\iint_S f(x,y,z) dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

bağıntısı vardır. O halde birinci yandaki yüzey integralinin mevcut olması için, ikinci yandaki integralin mevcut olması gerekir.

İspat //



S yüzeyinin $S_1, S_2, \dots, S_n$ bölüntülerini alalım. Bunların xy düzlemindeki izdüşümleri alınsın. Görüldüğü gibi S_i nin xy 'deki izdüşümü D_i dir. Her D_i nin köşegeni, ona karşı gelen S_i nin köşegeninden daha küçüktür. Şimdi,

$\iint_D f(x,y,z) dS$ integraline karşılık gelen,

$$T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

İspat

dS alanı , $dS = \iint_{D_i} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx$

şeklinde hesaplanır. Burada $z=z(x,y)$ dir. Eğer iki değişkenli fonksiyonlar için ortalama teoreni kullanılırsa,

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} / (x_i^*, y_i^*) \cdot A_i$$

yazılır. $(x_i^*, y_i^*) \in D_i$ ve A_i de D_i nin alanıdır.

Sonuç olarak T toplamı ,

$$T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} / (x_i^*, y_i^*) \cdot A_i$$

olur. Şimdi teoremin metnindeki integralin sağındaki iki katlı integral toplamı olan,

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i(x_i, y_i)) \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} A_i$$

ile karşılaştıralım.

$$\left| \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \Big|_{(x_i, y_i)} - \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \Big|_{(x_i^*, y_i^*)} \right| < \varepsilon \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} T - \tilde{T} &= \left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \left[\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \Big|_{(x_i^*, y_i^*)} - \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \Big|_{(x_i, y_i)} \right] A_i \right| \\ &\leq K \varepsilon \sum_{i=1}^n A_i \leq K \varepsilon A \end{aligned}$$

Bu teoremin kanıtıdır.

31.5.96 / Cuma

Örnek // $x^2+z^2=4$ silindirin $D=\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$

dikdörtgeninin üzerinde kalan alanı bulunuz.

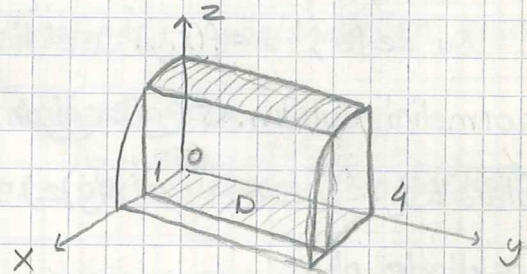
$$z = \sqrt{4-x^2}$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy dx$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 0} dy dx$$

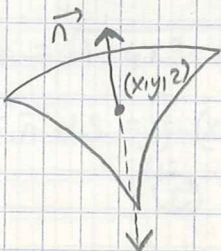
$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dy dx = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dy dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \left. \frac{2y}{\sqrt{4-x^2}} dx \right|_0^4 = 8 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 8 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} //$$



Vektör Fonksiyonlarının Yüzey İntegralleri

Eğer bir σ yüzeyinin bir (x_i, y_i, z) noktasında, sıfırdan farklı bir normali varsa, o zaman bu noktada iki tane zıt yönlü normal vektör vardır.



Bu vektörler, bileşenlerine göre adlandırılırlar. $\vec{n}$, normal vektörü pozitif $\vec{e}_3$ bileşenine sahip ise $\vec{n}$ 'ye, yukarıya

doğru birim normal ; eğer $\vec{n}$, negatif $\vec{e}_3$ bileşenine sahipse, aşağıya doğru birim normal denir.

Örnek, $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_3$ (yukarıya doğru birim normal)

$\vec{e}_3$, pozitifdir ve $\|\vec{n}\| = 1$ dir.

Bunu bir sena ile verelim;

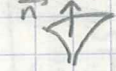
Terminoloji (Adlandırma):

Matematiksel anlar:

Şekli:

Yukarıya birim normal

$\vec{e}_3$ pozitif



Aşağıya birim normal

$\vec{e}_3$ negatif



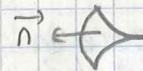
Sağa " "

$\vec{e}_2$ pozitif



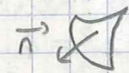
Sola " "

$\vec{e}_2$ negatif



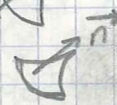
İleri " "

$\vec{e}_1$ pozitif



Geri " "

$\vec{e}_1$ negatif



Bu defa, $z = f(x, y)$ şeklinde verilen yüzeyin birim normalini bulalım. σ yüzeyinin denklemini, kapalı tanımlı olarak yazarsak, $G(x, y, z) = 0$ ya da $z - f(x, y) = 0$ --- ① şeklinde olur.

$G(x, y, z) = 0$ yüzeyinin bir (x, y, z) noktasındaki normali, bilindiği gibi, $\vec{\nabla} G$ (gradient vektörüdür.) dir.

$$\vec{\nabla} G = \frac{\partial G}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{e}_3 \quad \text{--- ②}$$

① den $\frac{\partial G}{\partial x} = - \frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial G}{\partial y} = - \frac{\partial z}{\partial y}$ ve $\frac{\partial G}{\partial z} = 1$

olduğundan, bunları ② de yerine yazalım.

$$\vec{\nabla} G = - \frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\|\vec{\nabla} G\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$\vec{n} = \frac{- \frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{--- ③}$$

Bu ise, birim normal vektördür. Yönü yukarıya doğrudur.

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{\|\vec{\nabla}G\|}$$

Tanım : σ , yönlendirilmiş bir yüzey ve $\vec{F}(x,y,z)$ bir vektör fonksiyonu, $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{e}_1 + g(x,y,z)\vec{e}_2 + h(x,y,z)\vec{e}_3$ olmak üzere, sürekli bileşenlere sahip ve $\vec{n}(x,y,z)$, (x,y,z) noktasındaki birim normali ise

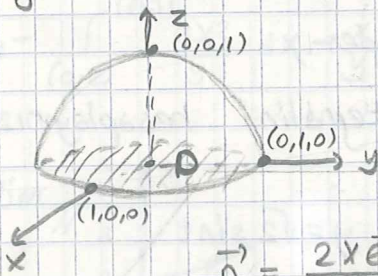
$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \quad \text{-----} \quad (4)$$

integraline, $\vec{F}$ nin σ yüzeyi üzerindeki yüzey integrali ya da $\vec{F}$ nin normal bileşeninin, σ yüzeyi üzerindeki yüzey integrali denir.

Örnek 11 σ yüzeyi $z = 1 - x^2 - y^2$ yüzeyinin, xy düzleninin üstünde kalan ve yukarı doğru normaller tarafından yönlendirilen kısmıdır.

$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ olduğuna göre,

$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ integralini hesaplayınız. (ds : yüzey diferansiyelidir.)



$z = 1 - x^2 - y^2$ nin yukarıya doğru birim normali ;

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{normal vektörü} \\ \Rightarrow \text{birim normal vektörü} \end{array} \right\}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot \frac{2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \, ds$$

$ds = \sqrt{1+2x^2+2y^2} \, dx \, dy$ olup, yerine yazılırsa,

$$ds = \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dx \, dy$$

$$\Rightarrow \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot (2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \, dx \, dy$$

$$= \iint_D (2x^2 + 2y^2 + z) dx dy = \iint_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) dx dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right\} \text{dönüşümlerle,}$$

$$= \iint_{\theta^{\circ}} (\rho^2 + 1) \rho d\rho d\theta$$

inner

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 (\rho^2 + 1) \rho d\rho d\theta = \frac{3}{2} \pi$$

Uyarı: Eğer $\sigma: z=z(x,y)$ denklemiyle verilen bir yüzey ve D 'de bu yüzeyin xy düzlemindeki izdüşümü ise

a) σ , yukarıya yönlendirilmiş ise,

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D F \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_1 - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) dS \quad (dS = \text{Alan}) \text{ dir.}$$

b) σ , yüzeyi aşağıya yönlendirilmiş ise,

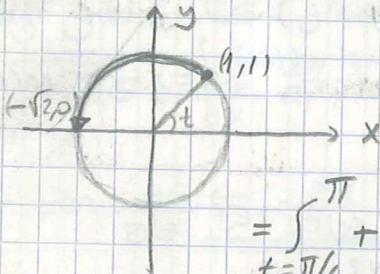
$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D F \left(\frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \right) dS \text{ olur.}$$

Alıştırmalar

1- $\gamma: x^2 + y^2 = 2$ çemberi üzerinde pozitif yönde, $(1,1)$ den $(-\sqrt{2}, 0)$ noktasına kadar olan yayı üzerinden,

$$\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \text{ eğrisel integralini hesaplayınız.}$$

Gözüm //



$$x = \sqrt{2} \cos t \quad y = \sqrt{2} \sin t$$

$$dx = -\sqrt{2} \sin t dt \quad dy = \sqrt{2} \cos t dt$$

$$= \int_{t=\pi/4}^{\pi} + \frac{\sqrt{2} \sin t}{2} \sqrt{2} \sin t dt + \frac{\sqrt{2} \cos t}{2} \sqrt{2} \cos t dt$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi} dt = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

2- $\gamma: (0,0)$ noktasını $(1,1)$ noktasına birleştiren doğru parçası olduğuna göre $\int_{\gamma} x^2 y dx + x y^2 dy = ?$

Çözüm //

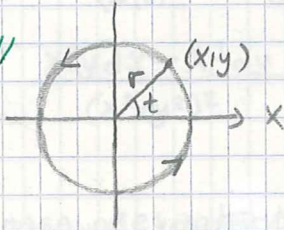
$$\int_{x=0}^1 x^2 x dx + x^3 dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} //$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,2), (3,4) \\ x_1, y_1, x_2, y_2 \\ \text{benzer yolla yapılır.} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \\ y = mx + n \end{array} \right\}$$

3- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve γ r yarıçaplı pozitif yönlendirilmiş bir çember olduğuna göre,

$$\oint_{\gamma} x f(x,y) dx + y f(x,y) dy = ?$$

Çözüm //



$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

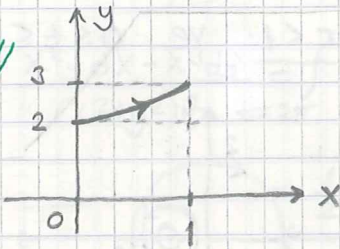
$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} x f dx + y f dy &= \int_{t=0}^{2\pi} r \cos t f(r \cos t, r \sin t) (-r) \sin t dt \\ &\quad + r \sin t f(r \cos t, r \sin t) (r \cos t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{(-r^2 \cos t \sin t + r^2 \sin t \cos t)}_0 f(r \cos t, r \sin t) dt = 0$$

4- $\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y} dx - \frac{x^3}{y^2} dy$ eğrisel integralini $y = x^2 + 2$ eğrisi boyunca hesaplayın.

Çözüm //



Eğri basit kapalı olmadığından, Green teoremi kullanılmaz.

$$\int P dx + Q dy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

olup, $\int P dx + Q dy = 0$ diferansiyel denklemi, tam diferansiyel denklemdir. Yukarıdaki eğrisel integral yoldan bağımsız olur. Eğrisel integralin değeri, eğrinin başlangıç ve bitim noktalarına bağlıdır.

$$F(x,y) = \int \frac{3x^2}{y} dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{y} + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow -\frac{x^3}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x^3}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x^3}{y} + c$$

$$\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y} dx - \frac{x^3}{y^2} dy = \int_{(0,2)}^{(1,3)} d\left(\frac{x^3}{y} + c\right) = \left[\frac{x^3}{y} + c\right]_{(0,2)}^{(1,3)} = \frac{1}{3} //$$

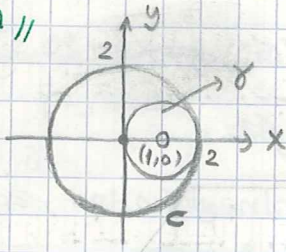
$$\left\{ \begin{array}{l} M dx + N dy = 0 \quad \text{tam dif. denkle.} \\ M = F_x, N = F_y \quad M_y = N_x \end{array} \right\}$$

5- $\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ integralini $y=3x-5$ doğrusu boyunca hesaplayın.

Çözüm // $\int_{x=1}^3 \frac{3x-5}{x^2} dx - \frac{3x}{x^2} dx = \int_{x=1}^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{5}{x} \Big|_1^3 = -\frac{10}{3} //$

6- $\int_C \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$ integralini $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinden hesaplayınız.

Çözüm //



(1,0) noktası C 'nin içinde olduğundan

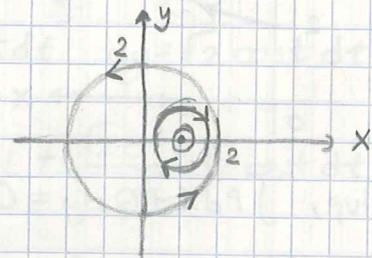
Green teoremi kullanılamaz. Ancak,

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2 \quad 0 < r < 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ için}$$

$$\gamma(t) : \left. \begin{array}{l} x-1 = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array} \right\} \text{ dersek,}$$

γ çemberi (1,0) merkezli ve

r yarıçaplı olur.

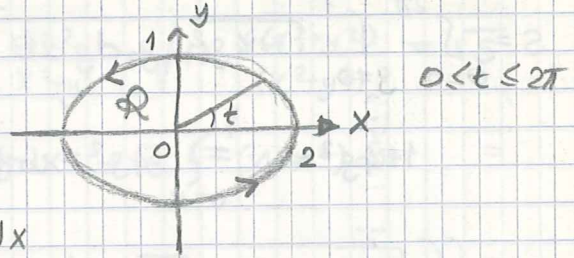


$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 + 2y^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{dir. Buna göre integralin değeri,}$$

$$\int \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2} = \int_{t=2\pi}^0 \frac{r \sin t (-r \sin t) - r \cos t r \cos t}{r^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi //$$

7- $\int_C xy^6 dx + (3x^2y^5 + 6x) dy$ integralini, $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsi boyunca hesaplayın.

Çözüm // $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ $x = 2 \cos t$
 $y = \sin t$



$$\int_C = \iint_R (\underbrace{6xy^5}_{P_y} + \underbrace{6 - 6xy^5}_{Q_x}) dy dx$$

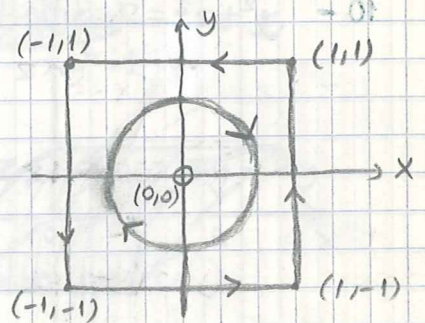
$$= 6 \iint_R dx dy = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} dy dx = 6A = 6\pi ab = 12\pi //$$

8- $\int_C \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$ eğrisel integralini, köşeleri $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ olan karenin çevresi

boyunca hesaplayın.

Çözüm // $P(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$ $Q(x,y) = -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}$

$(0,0)$ noktası P, Q nun sürekliliğini bozar. $0 < r < 1$ için,



$x = r \cos t$
 $y = r \sin t$ } çemberi için

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{x^4 - 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

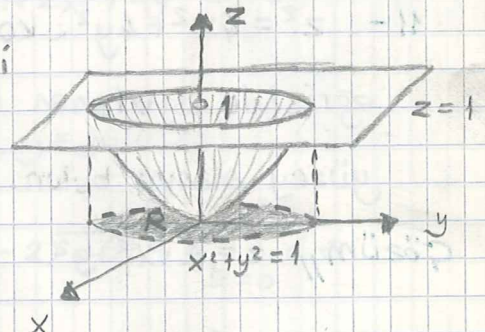
$$\int_C \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 t r \sin t (-r \cos t) - r^3 \cos^3 t r \cos t}{r^4} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \pi //$$

9- $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z=1$ düzlemi altında kalan kısmının alanını bulunuz.

Çözüm // $S = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z_x = 2x, z_y = 2y$$



$$S = \iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy$$

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$$

$$S = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

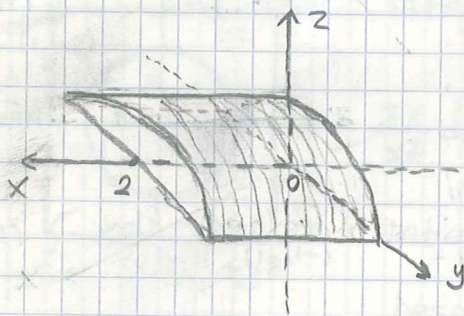
$$1+4\rho^2 = u \Rightarrow 4\rho^2 = u-1 \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{u-1}}{2}, d\rho = \frac{1}{4\sqrt{u-1}} du$$

$$S = \iint \sqrt{1+4\left(\frac{u-1}{4}\right)} \cdot \frac{\sqrt{u-1}}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{u-1}} du d\theta$$

$$= \iint \frac{1}{8} \sqrt{u} du d\theta = \frac{1}{8} \int \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{12} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\sqrt{1+4\rho^2} \right) \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{12} \int_{\theta=0}^{2\pi} (5\sqrt{5}-1) d\theta = \frac{1}{12} (5\sqrt{5}-1) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5}-1) //$$

10 - $y^2+z^2=9$ silindrinin $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$



dikdörtgeninin üstünde kalan parçasının yüzey alanını bulun.

Çözüm // $z = \sqrt{9-y^2}, z_x = 0, z_y = -\frac{y}{\sqrt{9-y^2}}$

$$S = \iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \int_{x=0}^2 \int_{y=-3}^3 \sqrt{1 + \frac{y^2}{9-y^2}} dx dy$$

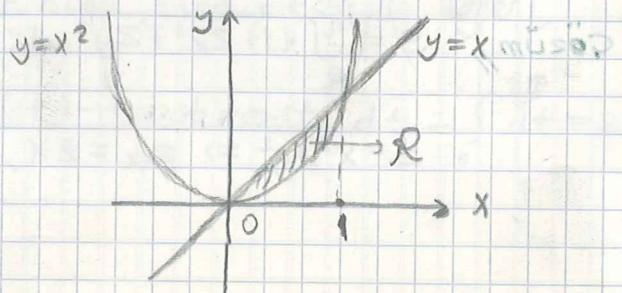
$$= \int_{x=0}^2 \int_{y=-3}^3 \frac{3}{\sqrt{9-y^2}} dy dx \quad y = 3 \sin t, dy = 3 \cos t dt$$

$$= 3 \int_{x=0}^2 \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3 \cos t dt}{3 \cos t} dx = 3\pi \int_{x=0}^2 dx = 6\pi //$$

11 - $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ konisinin xy düzleminde $y=x$ ve $y=x^2$ eğrisiyle sınırlanan bölgenin üstünde kalan ($z > 0$) kısmının yüzey alanını bulun.

Çözüm // $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$$S = \iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$



$$z_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{1 + \frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}} = \sqrt{5}$$

$$S = \iint_R \sqrt{5} \, dx \, dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x \sqrt{5} \, dy \, dx = \sqrt{5} \int_{x=0}^1 (x - x^2) \, dx$$

$$S = \sqrt{5} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{6} //$$

12- $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidin xy düzlemi üstünde kalan kısmının yüzey alanını bulun.

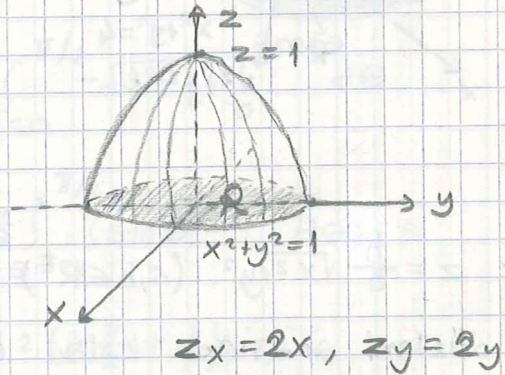
Gözüm // $S = \iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dy \, dx$

$$= \iint_R \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dy \, dx$$

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$S = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho \, d\theta$$

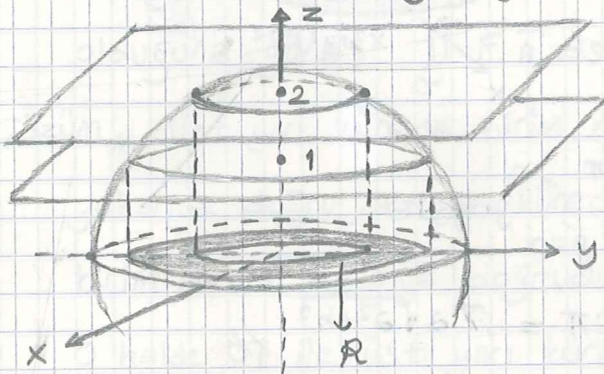
$$= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) //$$



$$z_x = 2x, \quad z_y = 2y$$

(9. sorunun benzeri.)

13- $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ küresinin $z=1$ ve $z=2$ düzlemleri arasında kalan kısmının yüzey alanını bulunuz.



Gözüm // $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} \, dx \, dy$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{16-x^2-y^2}} \, dx \, dy$$

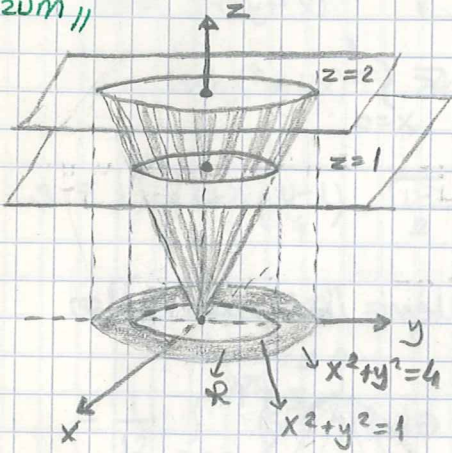
$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$S = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=\sqrt{12}}^{\sqrt{15}} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \, d\theta = -4 \int_{\theta=0}^{2\pi} (1-2) \, d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow S = 8\pi //$$

14 - $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $z=1$ ve $z=2$ düzlemleri arasında kalan kısmının yüzey alanını bulun.

Gözüm //



$$S = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{2} \iint_R dx \, dy$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_1^2 d\theta = 3\sqrt{2} \pi //$$

15 - $z = \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a, h \in \mathbb{R}^+$) konisinin xy düzlemi ve $z=h$ düzlemi arasında kalan kısmın yüzey alanını bulun.

Gözüm //

$$z_x = \frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z_y = \frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \frac{h^2 x^2}{a^2 (x^2 + y^2)} + \frac{h^2 y^2}{a^2 (x^2 + y^2)}} \, dx \, dy$$

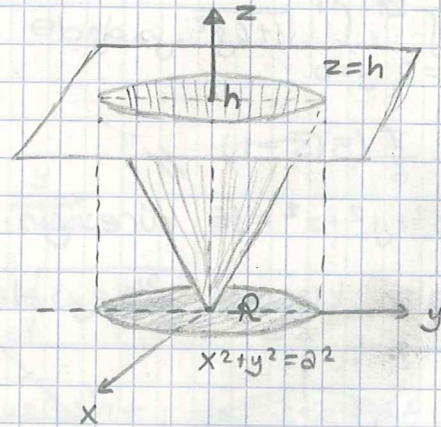
$$= \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \iint_R dx \, dy$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

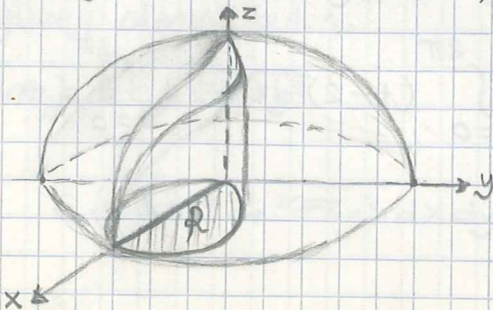
$$S = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$S = \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{2} 2\pi = \pi a \sqrt{a^2 + h^2} //$$



16 - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ konisinin $x^2 + y^2 = a x$, $a > 0$ silindiri içinde

kalan kısmının yüzey alanını bulun.



$x^2 + y^2 = 2x$ silindiri için $x = g \cos \theta$, $y = g \sin \theta$ dönüşümleriyle,

$$\Rightarrow g^2 \cos^2 \theta + g^2 \sin^2 \theta = 2g \cos \theta$$

$$\Rightarrow g^2 = 2g \cos \theta$$

$$\Rightarrow g = 2 \cos \theta \text{ olur.}$$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = 2 \iint_R \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \begin{matrix} x = g \cos \theta \\ y = g \sin \theta \end{matrix}$$

$$= 2a \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{g=0}^{2 \cos \theta} \frac{g \, dg \, d\theta}{\sqrt{a^2 - g^2}} = 2a \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left. -\sqrt{a^2 - g^2} \right|_0^{2 \cos \theta} d\theta$$

$$= -2a \int_{\theta=0}^{\pi/2} (2 \sin \theta - a) d\theta = -2a^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\sin \theta - 1) d\theta$$

$$= -2a^2 (-\cos \theta - \theta) \Big|_0^{\pi/2} = -2a^2 \left(-\frac{\pi}{2} + 1 \right)$$

$$S = -a^2(-\pi + 2)$$

$$S = (\pi - 2)a^2 //$$

17- σ dışarıya doğru normaller tarafından yönlendirilmiş,

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi (yüzeyi) ve $F(x, y, z) = z \vec{e}_3$

olduğuna göre, $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ integralini hesaplayın.

Gözüm // Üst yarı kürede, birim normal

yukarıya doğru, alt yarı kürede

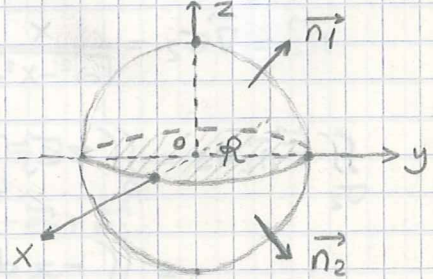
birim normal aşağıya doğrudur.

O halde σ_1 ile üst yarı küreyi,

σ_2 ile alt yarı küreyi gösterelim.

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, ds + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, ds$$

olur.



Üst yarı kürenin denklemi : $\sigma_1 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{\nabla} \sigma_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_1 + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n}_1 ds &= \iint_R z \vec{e}_3 \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_1 + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right] dx dy \\ &= \iint_R z dx dy = \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

$x = g \cos \theta, y = g \sin \theta$ dönüşümüyle,

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{g=0}^a (a^2 - g^2)^{1/2} g dg d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 - g^2 &= u^2 \\ -2g dg &= 2u du \\ g dg &= -u du \text{ 'den} \\ &\text{çözülür} \end{aligned} \right\}$$

$$g = a \sin t \quad dg = a \cos t dt$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{\pi/2} a^2 \cos t \sin t a \cos t dt d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{t=0}^{\pi/2} a^3 \cos^2 t \sin t dt d\theta$$

$$= a^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left. -\frac{\cos^3 t}{3} \right|_0^{\pi/2} d\theta = + \frac{a^3}{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$$

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n}_1 ds = \frac{2}{3} \pi a^3 //$$

Alt yarı kürenin denklemi : $\sigma_2 : z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\vec{n}_2 = \vec{\nabla} \sigma_2 = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_1 + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_2} \vec{F} \vec{n}_2 ds &= \iint_R z \vec{e}_3 \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_1 + \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \right] dx dy \\ &= \iint_R -z dx dy = \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\iint_{\sigma_2} \vec{F} \vec{n}_2 ds = \frac{2}{3} \pi a^3 \text{ bulunur. O halde}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} ds = \frac{2\pi a^3}{3} + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4}{3} \pi a^3 //$$

- 18 - σ ; birim normaller tarafından dışarıya doğru yönlendirilmiş $z=1-x^2-y^2$ nin xy düzleni üstündeki kısmı ve $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + 2z\vec{e}_3$ olduğuna göre, $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ integralini hesaplayınız.

Çözüm // $\vec{n} = \vec{\nabla} \sigma$, $\sigma: 1-x^2-y^2=z$

$$\Rightarrow \sigma: z+x^2+y^2-1=0 \text{ olur.}$$

$$\vec{\nabla} \sigma = 2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + 2z\vec{e}_3) \cdot (2x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + \vec{e}_3) dx dy$$

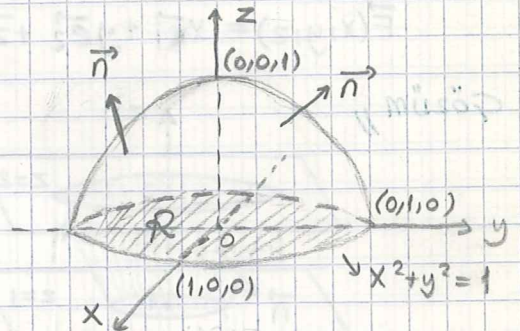
$$= \iint_{\mathcal{R}} (2x^2 + 2y^2 + 2z) dx dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (2x^2 + 2y^2 + 2 - 2x^2 - 2y^2) dx dy = 2 \iint_{\mathcal{R}} dx dy$$

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho d\theta = 2\pi //$$

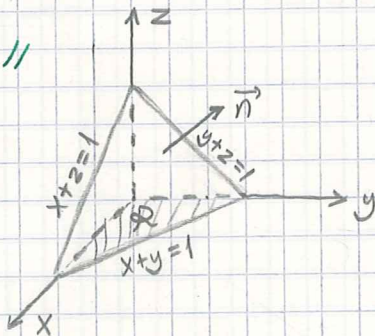


- 19 - σ ; $x+y+z=1$ düzleminin birinci bölgedeki kısmı ve bu yüzey, pozitif bileşenli birim normaller tarafından yönlendirilmiş olsun.

$$\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\vec{e}_1 + (y+z)\vec{e}_2 + (z+x)\vec{e}_3 \text{ olduğuna göre;}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = ?$$

Çözüm //



$$\sigma: x+y+z-1=0$$

$$\vec{n} = \vec{\nabla} \sigma = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} (x+y+y+z+z+x) dy dx$$

$$= 2 \iint_{\mathcal{R}} (x+y+z) dx dy$$

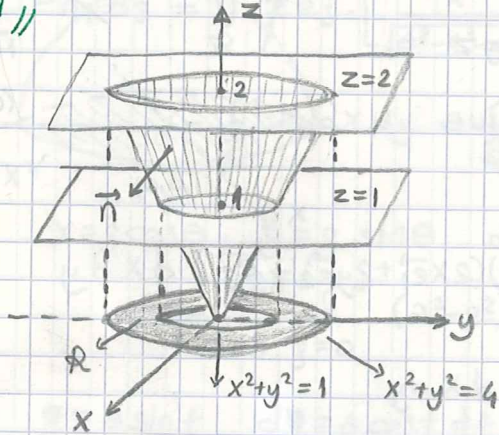
$$= 2 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} dx dy = 1 //$$

20- σ ; $z^2 = x^2 + y^2$ konisinin $z=1$ ve $z=2$ düzlemleri - 81

arasında kalan kısmı ve bu yüzey aşağıya doğru birim normallerle yönlendirilmiş olsun.

$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ olduğuna göre $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = ?$

Gözüm //



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sigma: \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$$

$$\vec{n} = -\vec{\nabla} \sigma$$

$$\vec{n} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z \right) dx dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (0) dx dy = 0 //$$

$\int$ Egrisel = Matematik , $\int$ iş = Fizik